

算子理论的Banach代数方法

(原书第二版)

〔美〕Ronald G. Douglas 著

颜 军 徐胜芝 舒永录 蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

科学出版社

(O−5440.01)

科学数理分社
电话：(010)64030228
E-mail：xuyuanyuan@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定 价：68.00 元

现代数学译丛 25

算子理论的 Banach 代数方法

(原书第二版)

〔美〕 Ronald G. Douglas 著

颜 军 徐胜芝 舒永录
蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

科 学 出 版 社
北 京

图字：01-2013-2618 号

内 容 简 介

本书是著者在(美国)密歇根大学 1968 年一门春季课程和(美国)纽约州立大学石溪分校 1969—1970 学年课程的讲稿基础上形成的，全书分七章．第 1 章介绍 Banach 空间及其对偶理论，其中基本结果有 Hahn-Banach 定理和开映射定理等．第 2 章涉及交换 Banach 代数的初等理论及其应用，如 Gelfand 变换及其对于 Fourier 级数收敛性的一个应用，其方法对于本书以后各章中算子理论的研究是极为本质的．第 3 章简单介绍了 Hilbert 空间与其几何理论，这包括 Pythagoras 定理和正交基方法．第 4 章介绍 Hilbert 空间上算子和正规算子的谱定理，引入了 C^*-代数概念并将此贯穿地用于该章的后半部分．第 5 章讨论了紧算子与 Fredholm 算子以及相关 C^*-代数．第 6 章讨论了 Hardy 空间理论中若干论题，如 Beurling 定理和内外因子分解方法．第 7 章研究了 Toeplitz 算子理论，其中包括了谱包含定理和本质谱连通性的 Widom 定理．

全书层次分明、论述严谨，具有较强的系统性和思想性，可作为高等学校数学专业高年级本科生和基础数学研究生的参考书，也可作为泛函分析方向研究生的教材．

图书在版编目（CIP）数据

算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版)/(美) 道格拉斯(Douglas, R. G.)著；颜军等译．—北京：科学出版社，2014.3
(现代数学译丛；25)
书名原文：Banach Algebra Techniques in Operator Theory (Second Edition)
ISBN 978-7-03-039887-1

Ⅰ. ①算… Ⅱ. ①道… ②颜… Ⅲ. ①巴拿赫空间-线性算子理论
Ⅳ. ①O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 037057 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：郑金红
责任印制：赵德静／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷 印张：13
字数：237 000

定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

谨以此中文译本献给著者的太太Bunny，

她随著者几次访问了中国

目　　录

中文版序言

序言

第二版序言

第一版序言

致谢

第 1 章　Banach 空间 ······ 1

1. 连续函数构成的 Banach 空间 ······ 1
2. 抽象 Banach 空间 ······ 2
3. 连续线性泛函构成的对偶空间 ······ 4
4. 几例 Banach 空间: c_0, ℓ^1 和 ℓ^∞ ······ 6
5. Banach 空间上弱拓扑 ······ 7
6. Alaoglu 定理 ······ 8
7. Hahn-Banach 定理 ······ 9
8. $C[0,1]$ 的对偶空间 ······ 11
9. 开映射定理 ······ 20
10. Lebesgue 空间: L^1 和 L^∞ ······ 22
11. Hardy 空间: H^1 和 H^∞ ······ 25

注记 ······ 26

习题 ······ 26

第 2 章　Banach 代数 ······ 30

1. 连续函数构成的 Banach 代数 ······ 30
2. 抽象 Banach 代数 ······ 31
3. Banach 代数中的抽象指标 ······ 33
4. 可乘线性泛函空间 ······ 35
5. Gelfand 变换 ······ 36
6. Gelfand-Mazur 定理 ······ 38
7. 交换 Banach 代数的 Gelfand 定理 ······ 39
8. 谱半径公式 ······ 40
9. Stone-Weierstrass 定理 ······ 41
10. 广义 Stone-Weierstrass 定理 ······ 44

11. 圆盘代数 …… 44
12. 有绝对收敛 Fourier 级数的函数代数 …… 49
13. 有界可测函数的代数 …… 50
注记 …… 51
习题 …… 51
第 3 章　Hilbert 空间的几何 …… 56
1. 内积空间 …… 56
2. Cauchy-Schwarz 不等式 …… 57
3. Pythagoras 定理 …… 58
4. Hilbert 空间 …… 58
5. 几例 Hilbert 空间: $\mathbb{C}^n, \ell^2, L^2$ 和 H^2 …… 58
6. Riesz 表示定理 …… 64
7. 规范正交基 …… 67
8. Hilbert 空间的维数 …… 67
注记 …… 69
习题 …… 69
第 4 章　Hilbert 空间上算子和 C*- 代数 …… 72
1. 共轭算子 …… 72
2. 正规算子和自伴算子 …… 74
3. 投影算子和闭线性子空间 …… 76
4. 乘法算子和极大交换代数 …… 78
5. 双侧移位 …… 80
6. C*- 代数 …… 81
7. Gelfand-Naimark 定理 …… 82
8. 谱定理 …… 82
9. 函数演算 …… 83
10. 正算子的平方根 …… 84
11. 单侧移位 …… 84
12. 极分解 …… 86
13. 弱算子拓扑和强算子拓扑 …… 88
14. W*- 代数 …… 89
15. L^∞- 空间的同构 …… 91
16. 有循环向量的正规算子 …… 92
17. 极大交换 W*- 代数 …… 94
18. C*- 代数之间的 *- 同态 …… 96

19. 扩充函数演算 ···························· 98
20. Fuglede 定理 ···························· 99
注记 ···························· 100
习题 ···························· 100
第 5 章　紧算子和 Fredholm 算子及指标理论 ···························· 105
1. 有限秩算子理想和紧算子理想 ···························· 105
2. 紧算子的逼近 ···························· 106
3. 紧算子之例：积分算子 ···························· 108
4. Calkin 代数和 Fredholm 算子 ···························· 109
5. Atkinson 定理 ···························· 109
6. Fredholm 算子的指标 ···························· 111
7. Fredholm 二择性 ···························· 112
8. Volterra 积分算子 ···························· 113
9. W*- 代数里酉群的连通性 ···························· 114
10. 指标的特征 ···························· 117
11. 商 C*- 代数 ···························· 118
12. 紧算子 C*- 代数的表示 ···························· 119
注记 ···························· 122
习题 ···························· 122
第 6 章　Hardy 空间 ···························· 126
1. Hardy 空间 H^1, H^2 和 H^1 ···························· 126
2. 西算子的约化子空间 ···························· 127
3. Beurling 定理 ···························· 129
4. F. & M. Riesz 定理 ···························· 129
5. H^∞ 的极大理想空间 ···························· 130
6. H^2 中函数的内外因子分解 ···························· 132
7. 外函数的模 ···························· 133
8. H^1 的对偶与 L^∞/H_0^∞ ···························· 136
9. $H^\infty + C$ 的闭性 ···························· 137
10. 通过内函数商的逼近 ···························· 137
11. Gleason-Whitney 定理 ···························· 138
12. H^∞ 与 L^∞ 之间的子代数 ···························· 139
13. 抽象调和扩张 ···························· 140
14. $H^\infty + C$ 的极大理想空间 ···························· 141
15. $H^\infty + C$ 中函数的可逆性 ···························· 142

注记 ······ 144
习题 ······ 145
第 7 章 Toeplitz 算子 ······ 150
1. Toeplitz 算子 ······ 150
2. 谱包含定理 ······ 151
3. 符号映射 ······ 152
4. 自伴 Toeplitz 算子的谱 ······ 154
5. 解析 Toeplitz 算子的谱 ······ 154
6. 由单侧移位生成的 C*- 代数 ······ 155
7. 有连续符号的 Toeplitz 算子的可逆性 ······ 156
8. 幺模 Toeplitz 算子的可逆性和预测理论 ······ 157
9. 符号属于 $H^\infty + C$ 的 Toeplitz 算子的谱 ······ 159
10. 本质谱的连通性 ······ 160
11. 对于 C*- 代数中心的局部化 ······ 165
12. Toeplitz 算子成为 Fredholm 算子的局部特征 ······ 168
注记 ······ 168
习题 ······ 171
参考文献 ······ 176
索引 ······ 182
《现代数学译丛》已出版书目 ······ 187

第 1 章　Banach 空 间

1.1　我们首先介绍一例最具代表性的 Banach 空间. 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, 以 $C(X)$ 记 X 上所有连续复值函数构成的集合. 对于 $C(X)$ 中 f_1 和 f_2 及复数 λ, 我们定义:

(1) $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$;

(2) $(\lambda f_1)(x)=\lambda f_1(x)$;

(3) $(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$.

在这些运算下, $C(X)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上有单位元的交换代数.

因 X 是紧的, 其上每个连续函数 f 的值域都是 $\mathbb{C}$ 的一个紧集, 故 f 是有界的, 而 $|f|$ 的上确界便是有限的. 我们称该上确界为 f 的范数, 并且将它记为

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in X\}.$$

易证该范数有下述性质:

(1) $\|f\|_\infty=0$ 当且仅当 $f=0$;

(2) $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty$;

(3) $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$;

(4) $\|fg\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|g\|_\infty$.

我们在 $C(X)$ 上定义一个度量$\rho:(f,g)\mapsto\|f-g\|_\infty$. 根据范数的上述性质 (1)—(3), 可直接得到 ρ 作为度量的如下特征性质:

(1) $\rho(f,g)=0$ 当且仅当 $f=g$;

(2) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$;

(3) $\rho(f,h)\leqslant\rho(f,g)+\rho(g,h)$.

易知相对于该度量的收敛恰是一致收敛. 该度量的一个重要性质是 $C(X)$ 依此度量完备.

1.2 命题　若 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 是完备度量空间.

证明　设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $C(X)$ 中一个 Cauchy 序列. 诸 $x\in X$ 使

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty=\rho(f_n,f_m),$$

因而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 Cauchy 复数序列, 如此可命 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. 我们需要证明 f 属于 $C(X)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$. 为此任给 $\varepsilon>0$, 取 N 使得 $n,m\geqslant$

N 蕴涵 $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. 任取 X 中一点 x_0, 有其邻域 U 使诸点 $x \in U$ 满足 $|f_N(x_0) - f_N(x)| < \varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(x)| \leqslant& \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0) - f_N(x_0)| \\ &+ |f_N(x_0) - f_N(x)| \\ &+ \lim_{n\to\infty} |f_N(x) - f_n(x)| \leqslant 3\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 f 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知 f 属于 $C(X)$. 进而对于 $n \geqslant N$ 和 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| \\ &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leqslant \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. 于是 $C(X)$ 是完备的. ■

接下来我们定义 Banach 空间概念, 这将上述例子的典型性质进行了抽象. 在本章后面我们会明白每个 Banach 空间都同构于某个 $C(X)$ 的一个线性子空间.

1.3 定义　复线性空间 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间指其上有范数 $\|\cdot\|$ 使得

(1) $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$,

(2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$, 此处 λ 是复数而 f 属于 $\mathscr{X}$,

(3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$, 此处 f 和 g 属于 $\mathscr{X}$,

且 $\mathscr{X}$ 按该范数导出的度量 $\rho : (f, g) \mapsto \|f - g\|$ 是完备的.

1.4 命题　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 则

由 $a(f, g) = f + g$ 定义的函数 $a : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是连续的;

由 $s(\lambda, f) = \lambda f$ 定义的函数 $s : \mathbb{C} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是连续的;

由 $n(f) = \|f\|$ 定义的函数 $n : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^+$ 是连续的.

证明　显然. ■

1.5 定向集与网　度量空间的拓扑可以用其中收敛序列的语言来描述. 对于更一般拓扑空间, 有必要引入广义序列的概念. 以后用收敛广义序列来描述拓扑将会带来很多方便, 因此我们有必要为读者回顾网的概念.

定向集 A 是具有下述性质的偏序集: 对于 A 中任意一对元素 α 与 β, 都有 A 中元素 γ 使 $\gamma \geqslant \alpha$ 且 $\gamma \geqslant \beta$. 网就是某个定向集 A 上一个函数 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. 若 λ_α 都落于某个拓扑空间 X, 则称这网在 X 中收敛至 λ 指对于 λ 的诸邻域 U, 都有 $\alpha_U \in A$ 使得当 $\alpha \geqslant \alpha_U$ 时, λ_α 落于 U. 空间 X 上两个拓扑相等当且仅当它们有相同收敛网. 最后, 空间 X 上拓扑也可通过事先规定收敛网来定义. 关于网和子网的更多知识, 读者可参阅文献 [71].

我们现在考虑 Banach 空间中 Cauchy 网的收敛性.

1.6 定义　在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中, 网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 Cauchy 网是指对于 $\varepsilon>0$, 都有 $\alpha_0\in A$ 使得 $\alpha_1,\alpha_2\geqslant\alpha_0$ 蕴涵 $\|f_{\alpha_1}-f_{\alpha_2}\|\leqslant\varepsilon$.

1.7 命题　在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中, 每个 Cauchy 网都是收敛的.

证明　设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的一个 Cauchy 网. 取 α_1 使得 $\alpha\geqslant\alpha_1$ 蕴涵 $\|f_\alpha-f_{\alpha_1}\|\leqslant 1$. 归纳地取好 A 中序列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ 后, 再取 $\alpha_{n+1}\geqslant\alpha_n$ 使得 $\alpha\geqslant\alpha_{n+1}$ 蕴涵

$$\|f_\alpha-f_{\alpha_{n+1}}\|<\frac{1}{n+1}.$$

显然 $\{f_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{X}$ 中一个 Cauchy 序列. 因为 $\mathscr{X}$ 是完备的, 其中便有向量 f 使 $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n}=f$.

以下只需证明 $\lim\limits_{\alpha\in A}f_\alpha=f$. 任给 $\varepsilon>0$, 取 n 使 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $\|f_{\alpha_n}-f\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 当 $\alpha\geqslant\alpha_n$ 时,

$$\begin{aligned}\|f_\alpha-f\|&\leqslant\|f_\alpha-f_{\alpha_n}\|+\|f_{\alpha_n}-f\|\\&<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

■

接下来我们考虑 Banach 空间中可和性的概念, 这将用于第 3 章.

1.8 定义　设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中某些向量构成的一个集合. 作集族 $\mathscr{F}=\{F\subseteq A: F$ 有限 $\}$, 规定其上偏序使 $F_1\leqslant F_2$ 表示 $F_1\subseteq F_2$, 则 $\mathscr{F}$ 是定向的. 对于 $F\in\mathscr{F}$, 命 $g_F=\sum\limits_{\alpha\in F}f_\alpha$. 如果网 $\{g_F\}_{F\in\mathscr{F}}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛至某个 g, 则称级数 $\sum\limits_{\alpha\in A}f_\alpha$ 是收敛的且记 $g=\sum\limits_{\alpha\in A}f_\alpha$.

1.9 命题　若 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的一个向量集使级数 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|$ 在实直线 $\mathbb{R}$ 上收敛, 则级数 $\sum\limits_{\alpha\in A}f_\alpha$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛.

证明　用定义 1.8 中符号, 只需证明 $\{g_F\}_{F\in\mathscr{F}}$ 是 Cauchy 网. 因 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|$ 收敛, 对于 $\varepsilon>0$, 存在 $F_0\in\mathscr{F}$ 使得 $F\geqslant F_0$ 蕴涵 $\sum\limits_{\alpha\in F}\|f_\alpha\|-\sum\limits_{\alpha\in F_0}\|f_\alpha\|<\varepsilon$. 因此当 $F_1,F_2\geqslant F_0$ 时,

$$\begin{aligned}\|g_{F_1}-g_{F_2}\|&=\left\|\sum_{\alpha\in F_1}f_\alpha-\sum_{\alpha\in F_2}f_\alpha\right\|\\&=\left\|\sum_{\alpha\in F_1\backslash F_2}f_\alpha-\sum_{\alpha\in F_2\backslash F_1}f_\alpha\right\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha\in F_1\setminus F_2}\|f_\alpha\| + \sum_{\alpha\in F_2\setminus F_1}\|f_\alpha\|$$
$$\leqslant \sum_{\alpha\in F_1\cup F_2}\|f_\alpha\| - \sum_{\alpha\in F_0}\|f_\alpha\| < \varepsilon,$$

从而 $\{g_F\}_{F\in\mathscr{F}}$ 是 Cauchy 网. 由定义知, $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ 收敛. ■

现在我们陈述赋范线性空间 (即有满足定义 1.3 中 (1)—(3) 的范数的复线性空间) 完备即成为 Banach 空间的一个基本准则, 这对于验证各种各样的例子是 Banach 空间会非常有用.

1.10 推论　赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间当且仅当对于 $\mathscr{X}$ 中每个序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 条件 $\sum\limits_{n=1}^\infty \|f_n\| < \infty$ 蕴涵级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ 的收敛性.

证明　若 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 则结论由上述命题直接得到. 反之, 设 $\mathscr{X}$ 满足级数假设且 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是其中一个 Cauchy 序列, 则我们可以按如下方法取子列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 使 $\sum\limits_{k=1}^\infty \|g_{n_{k+1}} - g_{n_k}\| < \infty$. 取 n_1 使得 $i,j \geqslant n_1$ 蕴涵 $\|g_i - g_j\| < 1$; 当 $\{n_k\}_{k=1}^N$ 取好后, 取 $n_{N+1} > n_N$ 使得 $i,j \geqslant n_{N+1}$ 蕴涵 $\|g_i - g_j\| < 2^{-N}$. 命 $f_1 = g_{n_1}$, 当 $k > 1$ 时, 命 $f_k = g_{n_k} - g_{n_{k-1}}$, 则 $\sum\limits_{k=1}^\infty \|f_k\| < \infty$. 因此由假设可知 $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k$ 收敛. 再由收敛性的定义知 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛, 从而 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 也收敛. 可见, $\mathscr{X}$ 是完备的, 即为一个 Banach 空间. ■

在研究线性空间的过程中, 线性泛函是非常重要的一个概念. 一个给定线性空间上线性泛函全体也是一个线性空间, 这个对偶性是研究这两个线性空间的一个有力工具. 对于研究 Banach 空间而言, 相应的概念是连续线性泛函.

1.11 定义　设 $\mathscr{X}$ 是个 Banach 空间. 一个函数 $\varphi : \mathscr{X} \to \mathbb{C}$ 为有界线性泛函是指

(1) 对于 $\mathscr{X}$ 中向量 f_1 和 f_2 及复数 λ_1 和 λ_2, 有

$$\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\varphi(f_1) + \lambda_2\varphi(f_2);$$

(2) 存在非负实数 M 使得诸 $f \in \mathscr{X}$ 适合 $|\varphi(f)| \leqslant M\|f\|$.

1.12 命题　设 φ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上一个线性泛函, 以下陈述等价:

(1) φ 是有界的;

(2) φ 是连续的;

(3) φ 在原点 0 连续.

证明　(1)⇒ (2). 任取 $\mathscr{X}$ 中一个向量 f 和收敛至 f 的任意一个网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 注意到 $\lim\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha - f\| = 0$, 可得

$$\lim_{\alpha\in A}|\varphi(f_\alpha)-\varphi(f)| = \lim_{\alpha\in A}|\varphi(f_\alpha - f)|$$
$$\leqslant \lim_{\alpha\in A} M\|f_\alpha - f\| = 0,$$

从而网 $\{\varphi(f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 收敛至 $\varphi(f)$. 这样, φ 是连续的.

(2)⇒ (3). 显然.

(3)⇒ (1). 因为 φ 在原点 0 处连续, 存在 $\delta>0$ 使得当 $f\in\mathscr{X}$ 满足 $\|f\|<\delta$ 时, $|\varphi(f)|<1$. 因此, 对于 $\mathscr{X}$ 中任意非零元 g, 我们有

$$|\varphi(g)| = \frac{2\|g\|}{\delta}\left|\varphi\left(\frac{\delta}{2\|g\|}g\right)\right| < \frac{2}{\delta}\|g\|,$$

从而 φ 是有界的. ■

接下来, 我们在 Banach 空间上有界线性泛函全体构成的空间上定义一个范数, 使它成为一个 Banach 空间.

1.13 定义　设 $\mathscr{X}^*$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上有界线性泛函全体. 对于 $\varphi\in\mathscr{X}^*$, 命

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|} : f\neq 0\right\}.$$

在此规定下, 称 $\mathscr{X}^*$ 为 $\mathscr{X}$ 的共轭空间或对偶空间.

1.14 命题　对偶空间 $\mathscr{X}^*$ 是 Banach 空间.

证明　显然, $\mathscr{X}^*$ 是线性空间, 其上范数显然也满足定义 1.3 中 (1) 和 (2). 为证这个范数满足此定义中 (3), 我们计算如下:

$$\begin{aligned}\|\varphi_1+\varphi_2\| &= \sup_{f\neq 0}\frac{|(\varphi_1+\varphi_2)(f)|}{\|f\|}\\ &= \sup_{f\neq 0}\frac{|\varphi_1(f)+\varphi_2(f)|}{\|f\|}\\ &\leqslant \sup_{f\neq 0}\frac{|\varphi_1(f)|}{\|f\|} + \sup_{f\neq 0}\frac{|\varphi_2(f)|}{\|f\|}\\ &= \|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|.\end{aligned}$$

最后, 我们需要证明 $\mathscr{X}^*$ 是完备的. 因此设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中一个 Cauchy 序列. 诸 $f\in\mathscr{X}$ 使

$$|\varphi_n(f)-\varphi_m(f)| \leqslant \|\varphi_n-\varphi_m\|\ \|f\|,$$

而复数列 $\{\varphi_n(f)\}_{n=1}^\infty$ 便是 Cauchy 序列. 因此可命 $\varphi(f) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(f)$. 由诸 φ_n 的

线性直接得到 φ 的线性. 进而, 取 N 使得 $n,m \geqslant N$ 蕴涵 $\|\varphi_n - \varphi_m\| < 1$. 于是,

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &\leqslant |\varphi(f) - \varphi_N(f)| + |\varphi_N(f)| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(f) - \varphi_N(f)| + |\varphi_N(f)| \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_N\| \; \|f\| + \|\varphi_N\| \; \|f\| \\ &\leqslant (1 + \|\varphi_N\|)\|f\|.\end{aligned}$$

因此 φ 属于 $\mathscr{X}^*$, 接下来只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 N 使得当 $n,m \geqslant N$ 时, $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$. 因此, 对于 $f \in \mathscr{X}$ 及 $n,m \geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}|(\varphi - \varphi_n)(f)| &\leqslant |(\varphi - \varphi_m)(f)| + |(\varphi_m - \varphi_n)(f)| \\ &\leqslant |(\varphi - \varphi_m)(f)| + \varepsilon\|f\|.\end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{m\to\infty} |(\varphi - \varphi_m)(f)| = 0$, 所以 $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon$. 因此, 序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛至 φ, 从而 $\mathscr{X}^*$ 是完备的. ■

读者可以比较一下上述证明与命题 1.2 的证明.

我们接下来考虑几例 Banach 空间并计算它们各自的对偶空间.

1.15 例　以 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 记非负整数集 $\mathbb{Z}^+$ 上有界复值函数全体. 在 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 上逐点定义函数的加法与乘法运算, 定义范数 $\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : n \in \mathbb{Z}^+\}$. 在这些规定下, 不难验证 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 是 Banach 空间, 这留作习题. 另外, $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 中使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ 的所有函数 f 构成 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 的一个闭线性子空间, 从而是 Banach 空间, 这个空间记为 $c_0(\mathbb{Z}^+)$.

现在以 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 记 $\mathbb{Z}^+$ 上使 $\sum\limits_{n=0}^\infty |\varphi(n)| < \infty$ 的所有复值函数 φ 全体. 逐点定义加法与数乘运算, 定义范数 $\|\varphi\|_1 = \sum\limits_{n=1}^\infty |\varphi(n)|$. 在此范数下, $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 是 Banach 空间, 其验证工作我们再次留为习题.

我们现在考虑对偶空间的实现问题, 先从 $c_0(\mathbb{Z}^+)$ 开始. 对于 $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}^+)$, 定义 $c_0(\mathbb{Z}^+)$ 上泛函 $\widehat{\varphi} : f \to \sum\limits_{n=0}^\infty \varphi(n)f(n)$, 这级数绝对收敛, 其原因在于下式

$$\sum_{n=0}^\infty |\varphi(n)||f(n)| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{n=0}^\infty |\varphi(n)| = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

又 $\widehat{\varphi}$ 显然是线性的, 由上述不等式知 $\widehat{\varphi}$ 属于 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 且 $\|\widehat{\varphi}\| \leqslant \|\varphi\|_1$, 其中 $\|\widehat{\varphi}\|$ 是 $\widehat{\varphi}$ 作为 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 中向量的范数. 因此, 从 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 至 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 的映射 $\alpha : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ 是合理定义的压缩映射. 接下来我们说明映射 α 是等距的和到上的.

为此任取 $L \in c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 并定义 $\mathbb{Z}^+$ 上函数 $\varphi_L : n \mapsto L(e_n)$, 其中 e_n 在 n 处取值 1, 其余地方取值 0. 下证 $\widehat{\varphi}_L = L$ 且 $\|\varphi_L\|_1 = \|L\|$. 对任意 $N \in \mathbb{Z}^+$, 考虑 $c_0(\mathbb{Z}^+)$

中元素

$$f_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} e_n,$$

此处暂时约定 0/0 取值为 0, 则 $\|f_N\|_\infty \leqslant 1$ 且由简单计算可得

$$\begin{aligned}\|L\| \geqslant |L(f_N)| &= \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} L(e_n)\right| \\ &= \sum_{n=0}^{N} |L(e_n)| = \sum_{n=0}^{N} |\varphi_L(n)|,\end{aligned}$$

因此, φ_L 属于 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 且 $\|\varphi_L\|_1 \leqslant \|L\|$. 于是从 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 的映射 $\beta : L \mapsto \varphi_L$ 也是合理定义的压缩映射. 进而, 任取 $g \in c_0(\mathbb{Z}^+)$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty} \|g - \sum\limits_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_\infty = 0$, 从而

$$\begin{aligned}L(g) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g(n)L(e_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g(n)\varphi_L(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\varphi_L(n) = \widehat{\varphi}_L(g).\end{aligned}$$

因此, 复合 $\alpha \circ \beta$ 是 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 上恒等算子. 最后, 若 $\widehat{\varphi} = 0$, 则显然有 $\varphi = 0$, 于是 α 是一对一的. 因此 α 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 到 $c_0(\mathbb{Z}^+)^*$ 上的一个等距同构.

现在考虑 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 的对偶空间的表示问题. 对于 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 中任意元素 f, 我们可定义 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)^*$ 中一个元素 $\widehat{f}$ 如下: $\widehat{f}(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)\varphi(n)$. 我们请初学者作为练习来验证这将 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)^*$ 与 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 等同起来.

1.16　我们现回头考虑抽象 Banach 空间. 若 $\mathscr{X}^*$ 中有界线性泛函的一个序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ 依范数收敛至 φ, 则它必定逐点收敛, 即诸 $f \in \mathscr{X}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$. 下例说明其逆不成立.

对于 $k \in \mathbb{Z}^+$ 和 $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^+)$, 定义 $L_k(f) = f(k)$. 诸 L_k 属于 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)^*$ 且 $\|L_k\| = 1$. 同时, 对于任意 $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^+)$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty} L_k(f) = 0$, 因此, 序列 $\{L_k\}_{k=0}^\infty$ 逐点收敛至零泛函. 但诸 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使 $\|L_k - 0\| = 1$, 因此 $\{L_k\}_{k=0}^\infty$ 不依范数收敛至零泛函.

可见, $\mathscr{X}^*$ 中点态收敛一般弱于依范数收敛, 即相比依范数收敛, 一个泛函序列更易于点态收敛. 因为点态收敛是个很自然的概念, 于是我们期望它在 Banach 空间的研究中能发挥作用. 事实确实如此, 因此接下来我们在回顾有关诱导拓扑的事实后定义点态收敛拓扑.

1.17 诱导拓扑　设 X 是一个集合而 Y 是一个拓扑空间, $\mathscr{F}$ 是从 X 到 Y 的一族函数. 规定 $\mathscr{F}$ 的诱导拓扑 $\mathscr{T}$ 为 X 上使 $\mathscr{F}$ 中诸函数连续的最弱或最小拓扑, 因此 $\mathscr{T}$ 是由集族 $\{f^{-1}(U) : f \in \mathscr{F}, \text{开集} U \subseteq Y\}$ 生成的拓扑. 网依此拓扑的收敛性可完全刻画如此: $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ 当且仅当诸 $f \in \mathscr{F}$ 使 $\lim\limits_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(x)$. 因此 $\mathscr{T}$ 是点态收敛拓扑.

如果 Y 是 Hausdorff 空间, 且 $\mathscr{F}$ 分离 X 中诸点, 则诱导拓扑 $\mathscr{T}$ 是 Hausdorff 的.

1.18 定义　设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, 其中诸向量 f 都对应 $\mathscr{X}^*$ 上一个函数 $\widehat{f} : \varphi \mapsto \varphi(f)$. 函数族 $\{\widehat{f} : f \in \mathscr{X}\}$ 的诱导拓扑称为 $\mathscr{X}^*$ 上弱 * 拓扑.

1.19 命题　$\mathscr{X}^*$ 上弱 * 拓扑是 Hausdorff 的.

证明　若 $\varphi_1 \neq \varphi_2$, 依条件知 X 中存在向量 f 使 $\varphi_1(f) \neq \varphi_2(f)$, 即 $\widehat{f}(\varphi_1) \neq \widehat{f}(\varphi_2)$. 因此函数族 $\{\widehat{f} : f \in \mathscr{X}\}$ 分离 $\mathscr{X}^*$ 中诸点. 由 1.17 节后面的说明可知该命题成立. ■

我们指出弱 * 拓扑一般不可度量化 (见习题 1.13). 接下来, 我们列出以下简单性质作为参考.

1.20 命题　对偶空间 $\mathscr{X}^*$ 中网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依弱 * 拓扑收敛至 φ 当且仅当 $\mathscr{X}$ 中诸向量 f 满足 $\lim\limits_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \varphi(f)$.

以下命题说明了 $\mathscr{X}^*$ 的有界子集上的弱 * 拓扑可由 $\mathscr{X}$ 的一个稠密子集确定, 这一结果在以后章节里会用到.

1.21 命题　设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个稠密子集而 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中一致有界网使诸 $f \in \mathscr{M}$ 满足等式 $\lim\limits_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \varphi(f)$, 则网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依弱 * 拓扑收敛至 φ.

证明　命 $M = \sup\{\|\varphi\|, \|\varphi_\alpha\| : \alpha \in A\}$, 无妨设 $M > 0$. 任给 $g \in \mathscr{X}$ 及 $\varepsilon > 0$, 取 $f \in \mathscr{M}$ 使 $\|f - g\| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$. 取 α_0 使得 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时, $|\varphi_\alpha(f) - \varphi(f)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 则

$$
\begin{aligned}
|\varphi_\alpha(g) - \varphi(g)| &\leqslant |\varphi_\alpha(g) - \varphi_\alpha(f)| + |\varphi_\alpha(f) - \varphi(f)| + |\varphi(f) - \varphi(g)| \\
&\leqslant \|\varphi_\alpha\|\|f - g\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|\varphi\|\|f - g\| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此, $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依弱 * 拓扑收敛至 φ. ■

1.22 定义　Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的单位球为集合 $\{f \in X : \|f\| \leqslant 1\}$ 并记为 $(\mathscr{X})_1$.

1.23 定理 (Alaoglu)　Banach 空间的对偶空间的单位球 $(\mathscr{X}^*)_1$ 依弱 * 拓扑是紧集.

证明　倘能将 $(\mathscr{X}^*)_1$ 等同于某族紧空间的乘积空间的一个闭子集, 其紧性便源自 Tychonoff 定理 (见参考文献 [71]). 对于 $(\mathscr{X})_1$ 中诸向量 f, 以 $\mathbb{C}_1^f$ 记 $\mathbb{C}$ 的闭单位圆盘. 以 P 记乘积空间 $\prod\limits_{f \in (\mathscr{X})_1} \mathbb{C}_1^f$, 它据 Tychonoff 定理是紧的. 从 $(\mathscr{X}^*)_1$ 到 P 有个映射 $\Lambda : \varphi \mapsto \varphi|_{(\mathscr{X})_1}$. 因 $\Lambda(\varphi_1) = \Lambda(\varphi_2)$ 表示 φ_1 和 φ_2 限制在 $(\mathscr{X}^*)_1$ 上相等,

故 Λ 是一对一的. 进而, $\mathscr{X}^*$ 中网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 依弱 * 拓扑收敛至 φ 当且仅当 $\mathscr{X}$ 中诸向量 f 使 $\lim\limits_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(f)=\varphi(f)$ 当且仅当 $(\mathscr{X})_1$ 中诸元 f 使 $\lim\limits_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)(f)=\Lambda(\varphi)(f)$. 后一条件恰是依 P 上乘积拓扑, $\lim\limits_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)=\Lambda(\varphi)$. 因此, Λ 是 $(\mathscr{X}^*)_1$ 至 P 的子集 $\Lambda[(\mathscr{X}^*)_1]$ 的一个同胚.

接下来, 我们只需证明 $\Lambda[(\mathscr{X}^*)_1]$ 是 P 的闭集. 假设 $\{\Lambda(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 $\Lambda[(\mathscr{X}^*)_1]$ 中一个网, 它依 P 上乘积拓扑收敛至 ψ. 若 f 和 g 以及 $f+g$ 都在 $(\mathscr{X})_1$ 中, 则

$$\begin{aligned}\psi(f+g)&=\lim_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)(f+g)\\&=\lim_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)(f)+\lim_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)(g)\\&=\psi(f)+\psi(g).\end{aligned}$$

进而, 若 f 和 λf 也属于 $(\mathscr{X})_1$, 则

$$\begin{aligned}\psi(\lambda f)&=\lim_{\alpha\in A}\Lambda(\varphi_\alpha)(\lambda f)=\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(\lambda f)\\&=\lambda\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(f)=\lambda\psi(f).\end{aligned}$$

因此 ψ 确立了 $(\mathscr{X}^*)_1$ 中一个元素 $\tilde{\psi}$ 使 $f\neq 0$ 时, $\tilde{\psi}(f)=\|f\|\psi(f/\|f\|)$. 我们看到, $\tilde{\psi}$ 不仅属于 $(\mathscr{X}^*)_1$ 而且使 $\Lambda(\tilde{\psi})=\psi$. 这样 $\Lambda[(\mathscr{X}^*)_1]$ 是 $\mathscr{P}$ 的一个闭子集, 而 $(\mathscr{X}^*)_1$ 在弱 * 拓扑下便是紧的. ■

上述定理的重要性在于紧空间拥有很多有趣性质这个事实, 我们将用它去证明诸 Banach 空间同构于某个 $C(X)$ 的一个线性子空间. 为此我们需要知道 Banach 空间上有多少连续线性泛函, 这个问题及更多问题的答案都源自 Hahn-Banach 定理. 虽然本章里我们只对 Banach 空间有兴趣, 但我们将在更加一般情况下去描述和证明 Hahn-Banach 定理. 为此, 我们需要以下定义.

1.24 定义 设 $\mathscr{E}$ 是实线性空间, 实值函数 $p:\mathscr{E}\to\mathbb{R}$ 为次线性泛函是指 $\mathscr{E}$ 中所有向量 f 和 g 使 $p(f+g)\leqslant p(f)+p(g)$, 而诸正数 λ 使 $p(\lambda f)=\lambda p(f)$.

1.25 定理 (Hahn-Banach) 设 $\mathscr{E}$ 是实线性空间, 而 p 是其上的一个次线性泛函. 又设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个线性子空间, 而 φ 是其上一个实线性泛函使 $\mathscr{F}$ 中诸向量 f 适合 $\varphi(f)\leqslant p(f)$, 则 $\mathscr{E}$ 上存在实线性泛函 Φ 使 $\mathscr{F}$ 中诸向量 f 适合 $\Phi(f)=\varphi(f)$ 而 $\mathscr{E}$ 中诸向量 g 适合 $\Phi(g)\leqslant p(g)$.

证明 不失一般性可设 $\mathscr{F}\neq\{0\}$. 取 $f\in\mathscr{E}\setminus\mathscr{F}$, 命

$$\mathscr{G}=\{g+\lambda f:\lambda\in\mathbb{R},g\in\mathscr{F}\}.$$

我们先将 φ 扩张至 $\mathscr{G}$ 上, 为此只需适当定义 $\Phi(f)$ 使诸 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $g\in\mathscr{F}$ 适合

$$\Phi(g+\lambda f)\leqslant p(g+\lambda f).$$

在 $\lambda \neq 0$ 时, 上式被 $|\lambda|$ 除后相当于要求所有 $h \in \mathscr{F}$ 满足不等式

$$\Phi(f-h) \leqslant p(f-h),$$
$$\Phi(-f+h) \leqslant p(-f+h),$$

这等价于

$$-p(-f+h)+\varphi(h) \leqslant \Phi(f) \leqslant p(f-h)+\varphi(h).$$

因此, $\Phi(f)$ 有一个值使 $\mathscr{G}$ 上 Φ 满足上述要求当且仅当

$$\sup_{h\in\mathscr{F}}\{-p(h-f)+\varphi(h)\} \leqslant \inf_{k\in\mathscr{F}}\{p(f-k)+\varphi(k)\}.$$

而对于 $\mathscr{F}$ 中所有向量 h 和 k, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(h)-\varphi(k)=\varphi(h-k) &\leqslant p(h-k)\\ &\leqslant p(f-k)+p(h-f),\end{aligned}$$

由此可得

$$-p(h-f)+\varphi(h) \leqslant p(f-k)+\varphi(k).$$

因此, φ 能扩张为 $\mathscr{G}$ 上线性泛函 Φ 使诸 $h \in \mathscr{G}$ 适合 $\Phi(h) \leqslant p(h)$.

我们现在的问题是设法获得 φ 的极大扩张. 为此以 $\mathscr{P}$ 记 φ 在较大线性子空间上满足要求的线性扩张全体, 其中诸元都形如 $(\mathscr{G}, \psi)$ 使 $\mathscr{G}$ 为包含 $\mathscr{F}$ 的一个线性子空间, 而 ψ 是 φ 在 $\mathscr{G}$ 上的一个线性扩张使诸 $g \in \mathscr{G}$ 满足 $\psi(g) \leqslant p(g)$. 在 $\mathscr{P}$ 上有自然偏序: $(\mathscr{G}_1, \psi_1) \leqslant (\mathscr{G}_2, \psi_2)$, 这表示 $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ 且诸 $f \in \mathscr{G}_1$ 使 $\psi_2(f) = \psi_1(f)$. 为了对 $\mathscr{P}$ 用 Zorn 引理, 我们必须说明 $\mathscr{P}$ 的诸链 $\{(\mathscr{G}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 都有上界 (但知链就是全序集). 为此命 $\mathscr{G} = \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathscr{G}_\alpha$, 并定义 $\mathscr{G}$ 上 ψ 使得当 f 属于某个 $\mathscr{G}_\alpha$ 时, $\psi(f) = \psi_\alpha(f)$. 易证 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{E}$ 中含 $\mathscr{F}$ 的一个线性子空间, 而 ψ 是合理定义的线性泛函使诸 $f \in \mathscr{G}$ 满足 $\psi(f) \leqslant p(f)$. 因此诸 $\alpha \in A$ 使 $(\mathscr{G}_\alpha, \psi_\alpha) \leqslant (\mathscr{G}, \psi)$. 可见, $\mathscr{P}$ 的诸链都有上界. 用 Zorn 引理知 $\mathscr{P}$ 有个极大元 $(\mathscr{G}_0, \Phi_0)$. 如果 $\mathscr{G}_0$ 不等于 $\mathscr{E}$, 则由前面讨论可得 $\mathscr{P}$ 中更大的元, 此与 $(\mathscr{G}_0, \phi_0)$ 的极大性矛盾. 因此, $\mathscr{G}_0 = \mathscr{E}$, 从而 Φ_0 是 φ 在 $\mathscr{E}$ 上一个满足要求的扩张. ■

本章会用到 Hahn-Banach 定理的如下形式.

1.26 定理 (Hahn-Banach)　设 $\mathscr{M}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间. 若 φ 是 $\mathscr{M}$ 上一个有界线性泛函, 则存在 $\Phi \in \mathscr{X}^*$ 使诸 $f \in \mathscr{M}$ 满足 $\Phi(f) = \varphi(f)$ 且 $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

证明　视 $\mathscr{X}$ 为一个实线性空间 $\tilde{\mathscr{X}}$, 范数是其上一个次线性泛函, 且 $\psi = \mathrm{Re}\varphi$ 是实线性子空间 $\tilde{\mathscr{M}}$ 上一个实线性泛函. 很显然, $\|\psi\| \leqslant \|\varphi\|$. 命 $p(f) = \|\varphi\|\,\|f\|$,

则 $\psi(f) \leqslant p(f)$. 因此由上述定理得 ψ 在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上一个实线性扩张 Ψ 使诸 $f \in \tilde{\mathscr{X}}$ 满足 $\Psi(f) \leqslant \|\varphi\|\ \|f\|$.

现定义 $\mathscr{X}$ 上泛函 $\Phi: f \mapsto \Psi(f) - \mathrm{i}\Psi(\mathrm{i}f)$. 接下来我们证明 Φ 是 $\mathscr{X}$ 上一个有界复线性泛函, 它是 φ 的扩张且有范数 $\|\varphi\|$. 对于 $\mathscr{X}$ 中向量 f 和 g, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(f+g) &= \Psi(f+g) - \mathrm{i}\Psi(\mathrm{i}(f+g)) \\ &= \Psi(f) + \Psi(g) - \mathrm{i}\Psi(\mathrm{i}f) - \mathrm{i}\Psi(\mathrm{i}g) \\ &= \Phi(f) + \Phi(g).\end{aligned}$$

进而, 对于实数 λ_1 和 λ_2, 由 $\Phi(\mathrm{i}f) = \Psi(\mathrm{i}f) - \mathrm{i}\Psi(-f) = \mathrm{i}\Phi(f)$ 得

$$\begin{aligned}\Phi((\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2)f) &= \Phi(\lambda_1 f) + \Phi(\mathrm{i}\lambda_2 f) = \lambda_1\Phi(f) + \mathrm{i}\lambda_2\Phi(f) \\ &= (\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2)\Phi(f).\end{aligned}$$

因此, Φ 是 $\mathscr{X}$ 上一个复线性泛函. 又对于 $f \in \mathscr{M}$ 有

$$\begin{aligned}\Phi(f) &= \Psi(f) - \mathrm{i}\Psi(\mathrm{i}f) = \mathrm{Re}\varphi(f) - \mathrm{i}\mathrm{Re}\varphi(\mathrm{i}f) \\ &= \mathrm{Re}\varphi(f) - \mathrm{i}(-\mathrm{Im}\varphi(f)) = \varphi(f).\end{aligned}$$

最后, 鉴于 $\|\Psi\| = \|\psi\|$ 且 Φ 是 φ 的一个扩张, 为证明 $\|\Phi\| = \|\Psi\|$, 只需证明 $\|\Phi\| \leqslant \|\Psi\|$. 对于 $f \in \mathscr{X}$, 取 $\Phi(f)$ 的辐角 θ, 则

$$\begin{aligned}|\Phi(f)| &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi(f) = \Phi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f) = \Psi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f) \\ &\leqslant \|\Psi\|\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f\| \leqslant \|\varphi\|\ \|f\|,\end{aligned}$$

如此可知 Φ 是 φ 在 $\mathscr{X}$ 上的一个保范扩张. ■

1.27 推论　若 f 是非零 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中一个元素, 则 $\mathscr{X}$ 上存在幺模线性泛函 φ 使得 $\varphi(f) = \|f\|$.

证明　我们可设 $f \neq 0$, 命 $\mathscr{M} = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\}$, 并定义其上一个线性泛函 $\psi: \lambda f \mapsto \lambda\|f\|$, 则 $\|\psi\| = 1$. 由 Hahn-Banach 定理给出 ψ 在 $\mathscr{X}$ 上的一个扩张 φ 就满足要求. ■

1.28 推论　若诸 $\varphi \in \mathscr{X}^*$ 使 $\varphi(f) = 0$, 则 $f = 0$.

证明　显然. ■

我们接下来要给出 Hahn-Banach 定理的两个应用. 首先我们证明 Banach 定理, 即 $C(X)$ 是万有 Banach 空间. 然后再确定 Banach 空间 $C[0,1]$ 的对偶空间.

1.29 定理 (Banach)　对于每个 Banach 空间 $\mathscr{X}$, 都存在紧 Hausdorff 空间 X 使得 $\mathscr{X}$ 等距同构于 $C(X)$ 的一个闭线性子空间.

证明 设 $X=(\mathscr{X}^*)_1$, 它据 Alaoglu 定理在相对弱 * 拓扑下是紧 Hausdorff 空间. 规定从 $\mathscr{X}$ 到 $C(X)$ 的映射 β 使 $(\beta f)(\varphi)=\varphi(f)$. 对于 $\mathscr{X}$ 中 f_1 和 f_2 以及 $\mathbb{C}$ 中 λ_1 和 λ_2, 有

$$\begin{aligned}\beta(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(\varphi)&=\varphi(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\\&=\lambda_1\varphi(f_1)+\lambda_2\varphi(f_2)\\&=\lambda_1\beta(f_1)(\varphi)+\lambda_2\beta(f_2)(\varphi).\end{aligned}$$

从而 β 是线性算子. 进而, 对于 $f\in\mathscr{X}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\beta(f)\|_\infty&=\sup_{\varphi\in(\mathscr{X}^*)_1}|\beta(f)(\varphi)|=\sup_{\varphi\in(\mathscr{X}^*)_1}|\varphi(f)\|\\&\leqslant\sup_{\varphi\in(\mathscr{X}^*)_1}\|\varphi\|\,\|f\|\leqslant\|f\|.\end{aligned}$$

由推论 1.27 知存在 $\varphi\in(\mathscr{X}^*)_1$ 使 $\varphi(f)=\|f\|$, 于是 $\|\beta(f)\|_\infty=\|f\|$, 而 β 是等距算子. ■

以上构造方法不会产生 $\mathscr{X}$ 到 $C((\mathscr{X}_*)_1)$ 上的一个同构, 即使存在 Y 使 $\mathscr{X}$ 恰为 $C(Y)$ 也是如此. 如果 $\mathscr{X}$ 是可分的, 则可用拓扑方法来证明 X 能取为单位闭区间.

虽然这个定理可以被看成是 Banach 空间的结构定理, 但相对于每个 $\mathscr{X}$, 缺乏一个典型的 X, 这限制了该定理的用途.

1.30 我们现在考虑 $C[0,1]$ 的对偶空间的表示问题, 这意味着我们需要寻找 $C[0,1]^*$ 中诸元的某种具体实现, 这类似于 1.15 节中得到的将 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 的对偶空间等同于 $\mathbb{Z}$ 上有界复值函数空间 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$. 我们将 $C[0,1]^*$ 等同于 $C[0,1]$ 上某些有界变差函数所成的空间. 在本章后面, 我们将对于一般 X 简单解释一下 $C(X)^*$. 我们先回顾一个定义.

1.31 定义 若 φ 为 $[0,1]$ 上一个复值函数, 称它为一个有界变差函数指存在非负实数 M, 使 $[0,1]$ 的诸划分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1$ 都满足下式

$$\sum_{i=0}^{n}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant M,$$

这些 M 中的最小者记为 $\|\varphi\|_{\mathrm{v}}$.

有界变差函数的一个重要性质是它在 [0, 1] 中诸点都有左极限和右极限.

1.32 命题 有界变差函数在诸点都有左极限和右极限.

证明 设 $[0,1]$ 上一个函数 φ 在 $(0,1]$ 中某点 t 没有左极限, 我们要证 φ 不是有界变差的. 存在 $\varepsilon>0$, 对于 $\delta>0$, 有 $(t-\delta,t)$ 中数 s 和 s' 使 $s<s'$ 而 $|\varphi(s)-\varphi(s')|\geqslant$

ε. 因此我们可归纳地取序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $|\varphi(s_n)-\varphi(s'_n)|\geqslant\varepsilon$ 且

$$0<s_{n-1}<s'_{n-1}<s_n<s'_n<t,\quad n>1.$$

现在考虑划分: $t_0=0$ 且 $t_{2N+1}=1$, 当 $1\leqslant k\leqslant N$ 时, $t_{2k-1}=s_k$ 且 $t_{2k}=s'_k$, 则

$$\sum_{k=0}^{2N}|\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)|\geqslant\sum_{n=1}^{N}|\varphi(s'_n)-\varphi(s_n)|\geqslant N\varepsilon.$$

可见, φ 不是 $[0,1]$ 上有界变差函数. 这在 φ 于某点没有右极限情形也类似可证. ■

因此, 倘若我们规定 $\varphi(0^-)=\varphi(0)$ 和 $\varphi(1^+)=\varphi(1)$, 则 $[0,1]$ 上有界变差函数 φ 在每点 $t\in[0,1]$ 都有左极限 $\varphi(t^-)$ 和右极限 $\varphi(t^+)$. 而且, 一个有界变差函数最多有可列个不连续点.

1.33 推论　若 φ 是 $[0,1]$ 上一个有界变差函数, 则 φ 至多有可列个不连续点.

证明　首先注意到 φ 在 $[0,1]$ 中某点 t 不连续当且仅当 $\varphi(t)\neq\varphi(t^+)$ 或 $\varphi(t)\neq\varphi(t^-)$. 而且, 若 $t_0,t_1,\cdots,t_n$ 是 $[0,1]$ 中不同的点, 则

$$\sum_{i=0}^{N}|\varphi(t_i)-\varphi(t_i^+)|+\sum_{i=0}^{N}|\varphi(t_i)-\varphi(t_i^-)|\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}.$$

因此, 对于每个 $\varepsilon>0$, 在 $[0,1]$ 中最多有有限个点 t 使

$$|\varphi(t)-\varphi(t^+)|+|\varphi(t)-\varphi(t^-)|\geqslant\varepsilon.$$

于是, φ 的不连续点构成的集合至多是可列的. ■

下面我们回顾 Riemann-Stieltjes 积分的定义. 规定区间 $[0,1]$ 上一个连续函数 f 相对于一个有界变差函数 φ 的积分 $\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi$ 是形如 $\sum_{i=1}^{n}f(t'_i)[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]$ 的和在 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i-t_{i-1}|$ 趋向 0 时的极限, 其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 是 $[0,1]$ 的任一划分, 而且 t'_i 是 $[t_{i-1},t_i]$ 中任意一个点.

在以下命题中, 我们收集了 Riemann-Stieltjes 积分的一些性质以备后用.

1.34 命题　区间 $[0,1]$ 上诸连续函数 f 相对于 $[0,1]$ 上诸有界变差函数 φ 的积分 $\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi$ 都存在. 这积分还有以下性质:

(1) 对于 $C[0,1]$ 中函数 f_1 和 f_2, 对于复数 λ_1 和 λ_2 及 $[0,1]$ 上有界变差函数 φ 有

$$\int_0^1(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)\mathrm{d}\varphi=\lambda_1\int_0^1 f_1\mathrm{d}\varphi+\lambda_2\int_0^1 f_2\mathrm{d}\varphi.$$

(2) 对于 $C[0,1]$ 中函数 f, 对于复数 λ_1 和 λ_2 及 $[0,1]$ 上有界变差函数 φ_1 和 φ_2 有

$$\int_0^1 f\mathrm{d}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)=\lambda_1\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi_1+\lambda_2\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi_2.$$

(3) 对于 $C[0,1]$ 中函数 f 和 [0, 1] 上有界变差函数 φ 有

$$\left|\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi\right|\leqslant\|f\|_\infty\|\varphi\|_{\mathrm{v}}.$$

证明 参见文献 [65] 的第 107 页. ■

对于 $[0,1]$ 上一个有界变差函数 φ, 规定 $C[0,1]$ 上一个泛函 $\widehat{\varphi}: f\mapsto\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi$. 由上述命题可知 $\widehat{\varphi}$ 是 $C[0,1]^*$ 中一个元素. 然而, 给定 $(0,1]$ 中某点 t_0, 我们定义 $[0,1]$ 上函数 ψ 使得 $t\neq t_0$ 时, $\psi(t)=\varphi(t)$, 而 $\psi(t_0)=\varphi(t_0^-)$, 则易证 $\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi=\int_0^1 f\mathrm{d}\psi$. 如果我们仅对由有界变差函数定义的 $C[0,1]$ 上线性泛函感兴趣, 则 φ 与 ψ 是等价的, 或更精确地有 $\widehat{\varphi}=\widehat{\psi}$. 为了避免将 $C[0,1]$ 的对偶空间与有界变差函数的等价类全体等同起来, 我们从诸等价类中取一个规范化的代表元使其在区间 (0,1) 上左连续.

1.35 命题 设 φ 是 $[0,1]$ 上一个有界变差函数, 而 ψ 是 $[0,1]$ 上如此定义的一个函数: 当 $0<t<1$ 时, $\psi(t)=\varphi(t^-)$, $\psi(0)=\varphi(0)$ 且 $\psi(1)=\varphi(1)$, 则 ψ 是 $[0,1]$ 上一个有界变差函数, $\|\psi\|_{\mathrm{v}}\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}$ 且

$$\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi=\int_0^1 f\mathrm{d}\psi,\quad f\in C[0,1].$$

证明 由推论 1.33, 我们可将 φ 在 $[0,1)$ 中左侧不连续点列为 $S=\{s_i|i\geqslant 1\}$. 由 ψ 的定义知诸 $t\in[0,1]\setminus S$ 使 $\psi(t)=\varphi(t)$. 为了证明 ψ 有界变差且 $\|\psi\|_{\mathrm{v}}\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}$, 考虑划分

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1,$$

使其有此性质: 某个 t_i 属于 S 时, t_{i-1} 和 t_{i+1} 便不属于 S, 只需对这样的划分证明

$$\sum_{i=0}^n|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)|\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}.$$

任意固定一个 $\varepsilon>0$, 作划分 $0=t_0'<\cdots<t_{n+1}'=1$ 使得当 t_i 不属于 S 或者 $i=0$ 或者 $i=n+1$ 时, $t_i'=t_i$; 当 t_i 属于 S 且 $0<i<n+1$ 时, $t_{i-1}<t_i'<t_i$ 且 $|\varphi(t_i^-)-\varphi(t_i')|<\dfrac{\varepsilon}{2n+2}$. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)| &=\sum_{i=0}^{n}|\varphi(t_{i+1}^-)-\varphi(t_i^-)|\\ &\leqslant\sum_{i=0}^{n}|\varphi(t_{i+1}^-)-\varphi(t'_{i+1})|\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n}|\varphi(t'_{i+1})-\varphi(t'_i)|\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n}|\varphi(t'_i)-\varphi(t_i^-)|\\ &\leqslant\varepsilon/2+\|\varphi\|_{\mathrm{v}}+\varepsilon/2.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 φ 有界变差且 $\|\psi\|_{\mathrm{v}}\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}$.

为了完成证明, 对于正整数 N, 我们定义 [0,1] 上函数 η_N 使得

$$\eta_N(t)=\begin{cases}0, & t\notin\{s_1,s_2,\cdots,s_N\},\\ \varphi(t)-\psi(t), & t\in\{s_1,s_2,\cdots,s_N\},\end{cases}$$

则易证 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\varphi-(\psi+\eta_N)\|_{\mathrm{v}}=0$ 且诸 $f\in C[0,1]$ 使 $\int_0^1 f\mathrm{d}\eta_N=0$. 因此, 由命题 1.34 可得

$$\int_0^1 f\mathrm{d}\varphi=\int_0^1 f\mathrm{d}\psi+\lim_{N\to\infty}\int_0^1 f\mathrm{d}\eta_N=\int_0^1 f\mathrm{d}\psi. \qquad \blacksquare$$

以 $BV[0,1]$ 记 $[0,1]$ 上所有在 0 点取值为 0 且在 (0, 1) 内左连续的有界变差复函数全体. 相对于点态加法与数乘, $BV[0,1]$ 是线性空间且其上有范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{v}}$.

1.36 定理　空间 $BV[0,1]$ 是一个 Banach 空间.

证明　我们将用推论 1.10 证明 $BV[0,1]$ 是完备的, 从而是 Banach 空间. 任取 $BV[0,1]$ 中一个函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}<\infty$. 因为 $[0,1]$ 中诸点 t 使

$$|\varphi_n(t)|\leqslant|\varphi_n(t)-\varphi_n(0)|+|\varphi_n(1)-\varphi_n(t)|\leqslant\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ 绝对且一致收敛至 $[0,1]$ 上一个函数 φ. 显然 $\varphi(0)=0$ 且 φ 在 $(0,1)$ 上左连续. 现在, 只需证明 φ 是 $[0,1]$ 上有界变差函数且 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\varphi-\sum\limits_{n=1}^{N}\varphi_n\|_{\mathrm{v}}=0$.

如果 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1$ 是 $[0,1]$ 的任一划分, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)| &= \sum_{i=0}^{k}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t_{i+1})-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t_i)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{k}|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)|\right] \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}.\end{aligned}$$

因此, φ 是有界变差函数, 从而在 $BV[0,1]$ 中. 进而, 以下不等式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}\left|(\varphi-\sum_{n=1}^{N}\varphi_n)(t_{i+1})-(\varphi-\sum_{n=1}^{N}\varphi_n)(t_i)\right| \\ &= \sum_{i=0}^{k}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(t_{i+1})-\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(t_i)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\sum_{n=N+1}^{\infty}|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}\end{aligned}$$

对于 $[0,1]$ 的任意划分都成立, 可见对于每个正整数 N 有

$$\left\|\varphi-\sum_{n=1}^{N}\varphi_n\right\|_{\mathrm{v}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}.$$

因此, φ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ 依 $BV[0,1]$ 中范数相等, 定理证毕. ■

如前所述, 对于 $[0,1]$ 上一个有界变差函数 φ, 我们以 $\widehat{\varphi}$ 记 $C[0,1]$ 上的线性泛函 $f \mapsto \int_0^1 f\mathrm{d}\varphi$.

1.37 定理 (Riesz) 映射 $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ 是 $BV[0,1]$ 与 $C[0,1]^*$ 间的一个等距同构.

证明 由命题 1.34 知 $\widehat{\varphi}$ 在 $C[0,1]^*$ 中且 $\|\widehat{\varphi}\| \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{v}}$. 为完成证明, 任取 $C[0,1]^*$ 中一个非零元 L, 我们必须构造出 $BV[0,1]$ 中一个函数 ψ 使 $\widehat{\psi} = L$ 且 $\|\psi\|_{\mathrm{v}} \leqslant \|L\|$, 同时还要证明 ψ 是唯一的. 为此, 我们先用 Hahn-Banach 定理将 L 扩张到一个更大 Banach 空间上.

以 $B[0,1]$ 记 $[0,1]$ 上有界复函数全体所成的空间. 用常规方法可证 $B[0,1]$ 相对于点态加法、数乘以及范数 $\|f\|_s = \sup\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是 Banach 空间. 对于

$[0,1]$ 的每个子集 E, 以 I_E 记 E 的特征函数(或指示函数), 即 I_E 在诸 $t \in E$ 处取值 1 而在诸 $t \in [0,1] \setminus E$ 处取值 0. 显然 I_E 属于 $B[0,1]$.

因为 $C[0,1]$ 是 $B[0,1]$ 的一个线性子空间且 L 是 $C[0,1]$ 上一个有界线性泛函, 所以我们可以将 L 扩张为 $B[0,1]$ 上一个有界线性泛函 L' 使 $\|L'\| = \|L\|$. 进而可要求 $L'(I_{\{0\}}) = 0$, 这是因为 $C[0,1]$ 中诸函数 f 和诸复数 λ 满足以下不等式

$$|L(f) + \lambda \times 0| \leqslant \|L\| \cdot \|f\|_\infty \leqslant \|L\| \cdot \|f + \lambda I_{\{0\}}\|_s.$$

现在当 $0 < t \leqslant 1$ 时, 以 $(0,t]$ 记半开半闭区间 $\{s : 0 < s \leqslant t\}$, 定义 $\varphi(t) = L'(I_{(0,t]})$, 命 $\varphi(0) = 0$. 我们先要证明 φ 有界变差且 $\|\varphi\|_{\mathrm{v}} \leqslant \|L\|$.

任取一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$. 在 $\varphi(t_{k+1}) \neq \varphi(t_k)$ 时, 命

$$\overline{\lambda_k} = [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]/|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|;$$

在其他情形, 命 $\overline{\lambda}_k = 0$. 函数 $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k I_{(t_k, t_{k+1}]}$ 属于 $B[0,1]$ 且 $\|f\|_s \leqslant 1$. 进而

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L'(I_{(t_k, t_{k+1}]}) \\
&= L'(f) \leqslant \|L'\| = \|L\|,
\end{aligned}$$

可见 φ 有界变差且 $\|\varphi\|_{\mathrm{v}} \leqslant \|L\|$.

其次, 对于 $g \in C[0,1]$, 我们证明 $L(g) = \int\limits_0^1 g \mathrm{d}\varphi$. 为此, 对于 $\varepsilon > 0$, 取一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$ 使得只要 s 和 s' 属于同一个子区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 时, $|g(s) - g(s')| < \dfrac{\varepsilon}{2\|L'\|}$, 并且

$$\left| \int_0^1 g \mathrm{d}\varphi - \sum_{k=0}^{n} g(t_k)(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

命 $f = \sum\limits_{k=0}^{n} g(t_k) I_{(t_k, t_{k+1}]} + g(0) I_{\{0\}}$, 则我们有不等式

$$\begin{aligned}
\left| L(g) - \int_0^1 g \mathrm{d}\varphi \right| &\leqslant |L(g) - L'(f)| + \left| L'(f) - \int_0^1 g \mathrm{d}\varphi \right| \\
&\leqslant \|L'\| \cdot \|g - f\|_s \\
&\quad + \left| \sum_{k=0}^{n} g(t_k)(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)) - \int_0^1 g \mathrm{d}\varphi \right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $L(g)=\int\limits_0^1 g\mathrm{d}\varphi$.

如此得到的 φ 在 $(0,1)$ 上不必左连续. 然而, 根据命题 1.35 知存在 $BV[0,1]$ 中函数 ψ 满足不等式 $\|\psi\|_{\mathrm{v}}\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{v}}\leqslant\|L\|$ 且诸 $g\in C[0,1]$ 满足以下等式

$$\widehat{\psi}(g)=\int_0^1 g\mathrm{d}\psi=\int_0^1 g\mathrm{d}\varphi=L(g).$$

因此, $\widehat{\psi}=L$. 根据本证明第一段得到的不等式以及上不等式, 可得 $\|\varphi\|_{\mathrm{v}}=L$. 现在还需证明 ψ 是唯一的, 即映射 $\varphi\mapsto\widehat{\varphi}$ 是一对一的.

对于 $\varphi\in BV[0,1]$ 和 $s\in(0,1]$, 作 $C[0,1]$ 中函数列 f_n 如下:

$$f_n(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{n-1}{n}s,\\ n\left(1-\dfrac{t}{s}\right), & \dfrac{n-1}{n}s<t\leqslant s,\\ 0, & s<t\leqslant 1,\end{cases}$$

则函数 $I_{(0,s]}-f_n$ 在开区间 $(\dfrac{n-1}{n}s,s)$ 外为 0. 再定义

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\varphi\left(\dfrac{n-1}{n}s\right), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{n-1}{n}s,\\ \varphi(t), & \dfrac{n-1}{n}s<t\leqslant s,\\ \varphi(s), & s<t\leqslant 1,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1(I_{(0,s]}-f_n)\mathrm{d}\varphi\right|&=\left|\int_0^1(I_{(0,s]}-f_n)\mathrm{d}\varphi_n\right|\\ &\leqslant\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}.\end{aligned}$$

接下来我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}=0$. 因 φ 在 s 左连续, 存在 $\delta>0$ 使 $s-\delta<t<s$ 蕴涵 $|\varphi(s)-\varphi(t)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1$ 是 $[0,1]$ 的一个划分使

$$\|\varphi\|_{\mathrm{v}}-\sum_{i=0}^{k}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨假设 $s=t_j$ 且 $t_j-t_{j-1}<\delta$, 则 $|\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 φ 在区间 $[t_{j-1},t_j]$ 的变差小于 ε, 这蕴涵当 $\dfrac{s}{n}<\delta$ 时, $\|\varphi_n\|_{\mathrm{v}}<\varepsilon$. 因此

$$\varphi(s)=\int_0^1 I_{(0,s]}\mathrm{d}\varphi=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\mathrm{d}\varphi.$$

从而 $\widehat{\varphi}=0$ 蕴涵 $\varphi=0$, 即映射 $\widehat{\varphi}\mapsto\varphi$ 是一对一的. 因此 $BV[0,1]=C[0,1]^*$. ■

1.38 $C(X)$ 的对偶空间 一般紧 Hausdorff 空间 X 上有界变差函数概念是没有意义的, 因此我们必须找到 $C(X)^*$ 中元素的不同表示方法. 易证每个定义在 X 的 Borel 集上的可数可加测度都能产生 $C(X)$ 上一个有界线性泛函. 而且, 正如上述定理的证明, 我们可以用 Hahn-Banach 定理将 $C(X)$ 上有界线性泛函扩张到有界 Borel 函数全体这个 Banach 空间上, 然后对 Borel 集的指示函数赋值获得一个 Borel 测度. 表示一个有界线性泛函的 Borel 测度可能不唯一. 如果我们仅关注 X 上正则 Borel 测度, 则这种表示是唯一的且 $C(X)^*$ 可以等同于 X 上复正则 Borel 测度全体 $M(X)$ 这个空间. 本书中我们不证明这个结果, 但请读者参阅文献 [65]. 这个结果常称为 Riesz-Markov 表示定理, 我们只用到它在 X 为平面上紧集的情形.

作为译注需要说明三件事实: 任何可测空间上复测度全体依复测度的全变差这个范数成为一个 Banach 空间; 本书用到的 Borel 测度都在紧集上取值有限; 当局部紧空间 X 中每个紧集都是可数个开集之交集 (如紧度量空间情形) 时, X 上 Borel 测度都是正则的.

1.39 商空间 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{M}$ 是其一个闭线性子空间, 我们欲证商空间$\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 依某个自然范数是 Banach 空间. 对于 X 中诸向量 f, 命 $[f]=\{f+g:g\in\mathscr{M}\}$, 以 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 记线性空间 $\{[f]:f\in\mathscr{X}\}$, 定义其上范数

$$\|[f]\|=\inf_{g\in\mathscr{M}}\|f+g\|=\inf_{h\in[f]}\|h\|.$$

先说明这确实是个范数. 由 $\|[f]\|=0$ 得 $\mathscr{M}$ 中一个序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f+g_n\|=0$. 因 $\mathscr{M}$ 是闭的, 故 f 在 $\mathscr{M}$ 中而 $[f]=[0]$. 反之, 若 $[f]=[0]$, 则 $-f$ 属于 $\mathscr{M}$, 从而

$$0\leqslant\|[f]\|\leqslant\|f-f\|=0.$$

可见 $\|[f]\|=0$ 当且仅当 $[f]=[0]$. 其次, 对于 $\mathscr{X}$ 中向量 f_1 和 f_2 及复数 λ, 有

$$\begin{aligned}\|\lambda[f_1]\|=\|[\lambda f_1]\|&=\inf_{g\in\mathscr{M}}\|\lambda f_1+g\|\\&=|\lambda|\inf_{h\in\mathscr{M}}\|f_1+h\|=|\lambda|\,\|[f_1]\|\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\|[f_1]+[f_2]\|=\|[f_1+f_2]\|&=\inf_{g\in\mathscr{M}}\|f_1+f_2+g\|\\&=\inf_{g_1,g_2\in\mathscr{M}}\|f_1+g_1+f_2+g_2\|\\&\leqslant\inf_{g_1\in\mathscr{M}}\|f_1+g_1\|+\inf_{g_2\in\mathscr{M}}\|f_2+g_2\|\\&\leqslant\|[f_1]\|+\|[f_2]\|.\end{aligned}$$

因此, $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 上范数. 以下还需证明 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 的完备性.

据推论 1.10, 只需说明 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 中满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|[f_n]\|<+\infty$ 的序列 $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n]$ 收敛. 取 $h_n\in[f_n]$ 使 $\|h_n\|<\|[f_n]\|+2^{-n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|h_n\|<\infty$, 根据命题 1.9 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n$ 有和为 h. 又 $[h_k]=[f_k]$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{n}[f_k]=[\sum\limits_{k=1}^{n}h_k]$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n]=[h]$. 可见, $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 是 Banach 空间.

我们还指出从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 的自然映射 $\pi:f\mapsto[f]$ 既是压缩映射又是开映射. 显然诸 $f\in\mathscr{X}$ 使 $\|\pi(f)\|\leqslant\|f\|$, 因此 π 是压缩的. 当 $\varepsilon>0$ 时, 命

$$N_\varepsilon(f)=\{g\in\mathscr{X}:\|f-g\|<\varepsilon\},$$
$$N_\varepsilon([f])=\{[k]\in\mathscr{X}/\mathscr{M}:\|[f]-[k]\|<\varepsilon\}.$$

对于 $[h]\in N_\varepsilon([f])$, 存在 $h_0\in[h]$ 使 $\|f-h_0\|<\varepsilon$, 因此 $[h]$ 属于 $\pi(N_\varepsilon(f))$, 而 $N_\varepsilon([f])$ 是开球 $N_\varepsilon(f)$ 的像. 可见, π 是开映射.

1.40 定义 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的一个线性变换 T 称为有界的是指

$$\|T\|=\sup_{f\neq 0}\frac{\|Tf\|}{\|T\|}<\infty.$$

从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的有界线性变换全体记为 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 将 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$ 简写为 $\mathfrak{L}(\mathscr{X})$. 一个线性变换是有界的当且仅当它是连续的.

1.41 命题 空间 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是 Banach 空间.

证明 只需证明 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 的完备性, 这留作习题. ■

虽然 Banach 空间的一个本质特点是它在范数导出的度量下是完备的, 但我们至今仍没真正用到这一性质. 完备性的重要性主要应归于 Baire 纲定理的应用. 我们现在给出两个主要应用, 即开映射定理和一致有界性定理.

1.42 定理 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 而 T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的一个有界线性变换. 若 T 是一对一的和到上的, 则 T^{-1} 存在且有界.

证明 显然 T^{-1} 有意义, 我们还需要证其有界性. 对于 $r>0$, 命

$$(\mathscr{X})_r=\{f\in\mathscr{X}:\|f\|\leqslant r\}.$$

只需找到 $r>0$ 使 $T^{-1}(\mathscr{Y})_1\subseteq(\mathscr{X})_r$, 即 $(\mathscr{Y})_1\subseteq T(\mathscr{X})_r$.

因 T 是到上的, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}T[(\mathscr{X})_n]=\mathscr{Y}$. 又 $\mathscr{Y}$ 是完备度量空间, Baire 纲定理表明 $\mathscr{Y}$ 不是可数个疏朗集之并. 因此存在 N 使 $T[(\mathscr{X})_N]$ 的闭包 $\mathrm{clos}T[(\mathscr{X})_N]$ 包含一个非空开集, 也含这个开集的闭包. 于是, 存在 $h\in(\mathscr{X})_N$ 和 $\varepsilon>0$ 使

$$Th+(\mathscr{Y})_\varepsilon=\{f\in\mathscr{Y}:\|f-Th\|\leqslant\varepsilon\}\subseteq\mathrm{clos}T[(\mathscr{X})_N],$$

从而

$$(\mathscr{Y})_\varepsilon \subseteq -Th + \mathrm{clos}T[(\mathscr{X})_N] \subseteq \mathrm{clos}T[(\mathscr{X})_{2N}].$$

命 $r = 2N/\varepsilon$, 得 $(\mathscr{Y})_1 \subseteq \mathrm{clos}T[(\mathscr{X})_r]$. 倘能去了左式的闭包, 就能得到我们的结论.

任给 $f \in (\mathscr{Y})_1$, 存在 $g_1 \in (\mathscr{X})_r$ 使 $\|f - Tg_1\| < 1/2$. 因 $f - Tg_1$ 属于 $(\mathscr{Y})_{1/2}$, 便存在 $g_2 \in (\mathscr{X})_{r/2}$ 使 $\|f - Tg_1 - Tg_2\| < 1/4$. 又因 $f - Tg_1 - Tg_2$ 属于 $(\mathscr{Y})_{1/4}$, 便存在 $g_3 \in (\mathscr{X})_{r/4}$ 使 $\|f - Tg_1 - Tg_2 - Tg_3\| < 1/8$. 以此类推, 我们得到 $\mathscr{X}$ 中一个序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\|g_n\| \leqslant r/2^{n-1}$ 且 $\left\|f - \sum_{i=1}^n Tg_i\right\| < 1/2^n$. 因为

$$\sum_{n=1}^\infty \|g_n\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{r}{2^{n-1}} = 2r,$$

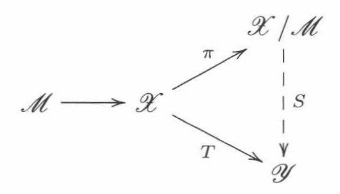
所以级数 $\sum_{n=1}^\infty g_n$ 收敛至 $(\mathscr{X})_{2r}$ 的某个元 g. 又因

$$Tg = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n g_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n Tg_k = f,$$

所以 $(\mathscr{Y})_1 \subseteq T(\mathscr{X})_{2r}$. 证毕. ■

1.43 推论 (开映射定理)　设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间. 若从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的有界线性变换 T 是到上的, 则 T 是开映射.

证明　因 T 连续, 集合 $\mathscr{M} = \{f \in \mathscr{X} : Tf = 0\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个闭线性子空间. 当 g 和 g_0 都属于 $[f]$ 时, $g - g_0$ 属于 $\mathscr{M}$, 即 $Tg = Tg_0$, 因此从 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 至 Y 存在一个合理定义的变换 $S : [f] \mapsto Tg$ 使下图



交换. 显然 S 是线性的. 对于 $[f] \in \mathscr{X}/\mathscr{M}$, 有不等式

$$\|S[f]\| = \inf_{g\in[f]} \|Tg\| \leqslant \|T\| \inf_{g\in[f]} \|g\| = \|T\|\ \|[f]\|,$$

于是 S 有界. 如果 $S[f] = 0$, 则 $Tf = 0$. 从而 f 属于 $\mathscr{M}$, 即 $[f] = [0]$. 因此, S 是一对一的. 最后, 因为 T 是到上的, 所以 S 是到上的. 根据上述定理, S 是开映射. 又因为自然同态 $\pi : \mathscr{X} \to \mathscr{X}/N$ 是开映射且 $T = S\pi$, 所以 T 也是开映射. ■

1.44 定理 (一致有界性定理)　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间且 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中一个序列使诸 $f \in \mathscr{X}$ 满足 $\sup\{|\varphi_n(f)| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$, 则 $\sup\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$.

证明 定义 $\mathscr{X}$ 上实值函数 $u: f \mapsto \sup\{|\varphi_n(f)| : n \in \mathbb{Z}^+\}$. 对于 $k \in \mathbb{Z}^+$, 作 $\mathscr{X}$ 的子集 $\mathscr{L}_k = \{f \in \mathscr{X} : u(f) \leqslant k\}$. 因 φ_n 都是连续函数, 诸 $\mathscr{L}_k$ 都是闭集. 又因 $k \geqslant u(f)$ 时, f 属于 $\mathscr{L}_k$, 故 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^+} \mathscr{L}_k = \mathscr{X}$. 现据 Baire 纲定理, 有 $\mathscr{X}$ 中一个向量 f_0 和一个正数 δ 使某个 $\mathscr{L}_{k_0}$ 包含开球 $\{f \in \mathscr{X} : \|f - f_0\| < \delta\}$, 也包含其闭包.

根据计算, 我们得

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_n\| &= \sup_{g\in(\mathscr{X})_\delta} \frac{1}{\delta}|\varphi_n(g)| \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}\sup_{g\in(\mathscr{X})_\delta} |\varphi_n(g+f_0)| + \frac{1}{\delta}|\varphi_n(f_0)| \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}k_0 + \frac{1}{\delta}u(f_0),
\end{aligned}
$$

从而 $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+}\|\varphi_n\| \leqslant \dfrac{k_0}{\delta} + \dfrac{1}{\delta}u(f_0)$. 证毕. ■

本章最后我们给出一些经典 Banach 空间的例子, 它们由 Lebesgue 和 Hardy 建立起来. (我们假定读者熟悉经典测度论.)

1.45 Lebesgue 空间 设 $\mathscr{S}$ 是 X 的某些子集所成的一个 σ-代数, 而 μ 是其上的一个概率测度, 以 $\mathscr{L}^1$ 记 X 上可积复值函数全体依点态加法与数乘所成的线性空间, 以 $\mathscr{N}$ 记 X 上几乎处处为零的函数全体所成的线性子空间. 因此, X 上可测函数 f 属于 $\mathscr{L}^1$ 是指 $\int_X |f|\mathrm{d}\mu < \infty$, 它属于 $\mathscr{N}$ 是指 $\int_X |f|\mathrm{d}\mu = 0$. 以 L^1 记商空间 $\mathscr{L}^1/\mathscr{N}$, 其上有范数 $\|[f]\|_1 = \int_X |f|\mathrm{d}\mu$. 易证 $\|\cdot\|_1$ 确实满足 1.1 中范数的特征条件 (1)—(3). 证明 L^1 的完备性稍微有点困难, 我们将利用推论 1.10.

设 $\{[f_n]\}_{n=1}^\infty$ 是 L^1 中一个序列使 $\sum\limits_{n=1}^\infty \|[f_n]\|_1 \leqslant M < \infty$. 取每个 $[f_n]$ 的代表元 f_n, 则 $\left\{\sum\limits_{n=1}^N |f_n|\right\}_{N=1}^\infty$ 是由非负可测函数组成的递增序列且满足以下性质:

$$
\int_X \sum_{n=1}^N |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^N \|[f_n]\|_1 \leqslant M, \quad N \geqslant 1.
$$

由 Fatou 引理知 $h = \sum\limits_{n=1}^\infty |f_n|$ 可积, 因此 $\left\{\sum\limits_{n=1}^N f_n\right\}_{N=1}^\infty$ 几乎处处收敛至某个可积函数 k, 最后, 我们有

$$
\begin{aligned}
\left\|[k] - \sum_{n=1}^N [f_n]\right\|_1 &= \int_X \left|\sum_{n=1}^\infty f_n - \sum_{n=1}^N f_n\right| \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^\infty \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{n=N+1}^\infty \|[f_n]\|_1,
\end{aligned}
$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n]=[k]$. 于是 L^1 是一个 Banach 空间.

当 $1<p<\infty$ 时, 以 $\mathscr{L}^p$ 记满足 $\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$ 的可测函数 f 全体, 则 $\mathscr{L}^p$ 是线性空间 $\mathscr{L}^1$ 的一个线性子空间且商空间 $L^p=\mathscr{L}^p/\mathscr{N}$ 依范数

$$\|[f]\|_p=\left(\int\limits_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

是 Banach 空间. 我们将在第 3 章证明 $p=2$ 情形. 至于其他情形的证明细节, 读者可参阅文献 [65].

以 $\mathscr{L}^\infty$ 记本质有界函数构成的线性空间. 所谓 f 本质有界是指集合

$$\{x\in X:|f(x)|>M\}$$

在 M 充分大时有零测度. 这些 M 中的最小值记为 $\|f\|_\infty$, 则易证 $\|f\|_\infty=0$ 当且仅当 f 属于 $\mathscr{N}$. 因此, $\|\cdot\|_\infty$ 确立了商空间 $L^\infty=\mathscr{L}^\infty/\mathscr{N}$ 上一个范数. 我们将用推论 1.10 来证明 L^∞ 的完备性. 任取 L^∞ 中满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|[f_n]\|_\infty\leqslant M<\infty$ 的序列 $\{[f_n]\}_{n=1}^\infty$. 诸 $[f_n]$ 中取代表元 f_n 使 $|f_n|$ 有上界 $\|[f_n]\|_\infty$. 对于 $x\in X$ 便有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|[f_n]\|_\infty\leqslant M.$$

于是, $h:x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 是合理定义的有界可测函数, 从而属于 $\mathscr{L}^\infty$. 事实上,

$$|h(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant M.$$

我们省略 $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|[h]-\sum\limits_{n=1}^{N}[f_n]\right\|_\infty=0$ 的证明. 因此 L^∞ 是 Banach 空间.

虽然 L^p 空间中元素是函数的等价类, 但我们通常将其作为函数来处理, 因此, 当我们写 f 属于 L^1 时, 我们意指 f 属于 $\mathscr{L}^1$ 且表示 L^1 中 f 所在的等价类 $[f]$. 自此以后, 我们将对这两个符号不作区分.

下面我们说明 $(L^1)^*$ 可等同于 L^∞, 这一结果可与例 1.15 进行比较. 我们将给出的证明与习题 3.22 的不一样, 后者不利用 Radon-Nikodym 定理.

对于 $\varphi\in L^\infty$, 我们以 $\widehat{\varphi}$ 记 L^1 上的线性泛函 $f\mapsto\int\limits_X f\varphi\mathrm{d}\mu$.

1.46 定理　映射 $\varphi\mapsto\widehat{\varphi}$ 是 L^∞ 到 $(L^1)^*$ 上的一个等距同构.

证明　设 φ 属于 L^∞ 且 f 属于 L^1, 则几乎所有 $x \in X$ 使 $|(\varphi f)(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f(x)|$, 因此, $f\varphi$ 是可积的, 而 $\widehat{\varphi}$ 便是合理定义的线性泛函. 又

$$|\widehat{\varphi}(f)| \leqslant \int_X |f\varphi| \mathrm{d}\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_X |f| \mathrm{d}\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1,$$

因此 $\widehat{\varphi}$ 属于 $(L^1)^*$ 且 $\|\widehat{\varphi}\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

现设 L 是 $(L^1)^*$ 中一个元素. 对于 X 的任意可测子集 E, 指示函数 I_E 属于 L^1 且

$$\|I_E\|_1 = \int_X I_E \mathrm{d}\mu = \mu(E).$$

命 $\lambda(E) = L(I_E)$, 则易证 λ 是一个有限可加集函数且 $|\lambda(E)| \leqslant \mu(E)\|L\|$. 任取一个可测集套 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, 则

$$\left|\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n)\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} |\lambda(E_n)| \leqslant \|L\| \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

因此, λ 是 X 上一个受控于 μ 的复测度. 于是, 根据 Radon-Nikodym 定理, X 上存在可积函数 φ 使诸可测集 E 满足等式 $\lambda(E) = \int\limits_X I_E \varphi \mathrm{d}\mu$. 最后, 只需证明 φ 有本质上确界 $\|L\|$ 以及诸 $f \in L^1$ 满足等式 $L(f) = \int\limits_X f\varphi \mathrm{d}\mu$. 对于整数 N, 命

$$E_N = \left\{x \in X : \|L\| + \frac{1}{N} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant N\right\},$$

则 E_N 是可测的且 $I_{E_N}\varphi$ 是有界的. 设 $f = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i I_{E_i}$ 是简单函数, 则简单计算可得 $L(f) = \int\limits_X f\varphi \mathrm{d}\mu$. 进而, 用简单函数逼近方法可知, 左式对于被 E_N 支撑的可积函数 f 都成立. 定义

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\varphi(x)}}{|\varphi(x)|}, & x \in E_N \text{且} \varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则函数 g 属于 L^1 且被 E_N 支撑以及 $\|g\|_1 \leqslant \mu(E_N)$. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} \mu(E_N)\|L\| \geqslant |L(g)| &= \left|\int_X g\varphi \mathrm{d}\mu\right| \\ &= \int_X |\varphi| I_{E_N} \mathrm{d}\mu \geqslant \left(\|L\| + \frac{1}{N}\right) \mu(E_N), \end{aligned}$$

从而 $\mu(E_N) = 0$. 因此, $\mu(\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} E_N) = 0$. 从而 φ 是本质有界的且 $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|L\|$.

进而, 上述方法也可用来证明

$$L(f) = \int_X f\varphi \mathrm{d}\mu, \qquad f \in L^1.$$

证毕. ■

我们下面考虑一些由 Hardy 首先研究的 Banach 空间. 虽然这些空间可看成是某些 L^p 空间的线性子空间, 但这与 Hardy 的观点有很大区别. Hardy 将它们看成单位圆盘上解析函数构成的空间. 虽然我们在以后章节里会详细讨论这些空间, 但这里我们还是会给出它们的定义以及一些基本事实.

1.47 Hardy 空间　以 $\mathbb{T}$ 记复平面中单位圆周, μ 是其上规范化的 Lebesgue 测度使得 $\mu(\mathbb{T}) = 1$. 我们可以定义相应于 μ 的 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{T})$, 而将 Hardy 空间 H^p 定义为 $L^p(\mathbb{T})$ 的一个闭线性子空间. 像上节一样, 我们这里也仅考虑 $p = 1$ 或 $p = \infty$ 的情形.

对于 $n \in \mathbb{Z}$, 规定 $\mathbb{T}$ 上函数 $\chi_n : z \mapsto z^n$. 若规定

$$H^1 = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0, n = 1, 2, 3, \cdots \right\},$$

则 H^1 显然是 $L^1(\mathbb{T})$ 的一个线性子空间. 进而, 因为集合

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

是 $L^1(\mathbb{T})$ 上有界线性泛函 $f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$ 的零空间, 所以 H^1 是 $L^1(\mathbb{T})$ 的一个闭线性子空间, 故为 Banach 空间.

基于类似的理由, 集合

$$H^\infty = \left\{ \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0, n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个闭线性子空间. 而且, 在这种情况下,

$$\left\{ \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

是弱 * 连续泛函 $\widehat{\chi}_n : \varphi \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$ 的零空间或核, 从而是弱 * 闭的. 因此 H^∞ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的弱 * 闭线性子空间.

以 H_0^∞ 记闭线性子空间

$$\left\{ \varphi \in H^\infty : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0 \right\},$$

则 H^1 的对偶空间等距同构于 $L^\infty(\mathbb{T})/H_0^\infty$. 我们这里不证明这个结论, 但会在第 6 章考虑这个问题.

注　记

大多数泛函分析教材都会相当细致地讨论 Banach 空间的基本理论, 这详见于如下文献: Bourbaki[7], Goffman 和 Podrick[44], Naimark[80], Riesz 和 Sz.-Nagy[92], Rudin[95], 以及 Yoshida [117]. 进而, 有兴趣的读者可查阅 Banach[5].

习　题

在本章习题中, 我们都假设 X 是一个紧 Hausdorff 空间而 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间.

习题 1.1 证明空间 $C(X)$ 是有限维的当且仅当 X 是有限的.

习题 1.2 证明 $\mathscr{X}$ 上每个线性泛函都是连续的当且仅当 $\mathscr{X}$ 是有限维的.

习题 1.3 设 $\mathscr{M}$ 是一个赋范线性空间, 证明在等距同构的意义下有包含 $\mathscr{M}$ 的唯一 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 使 $\operatorname{clos}\mathscr{M} = \mathscr{X}$.

习题 1.4 完成 1.15 节中最后的证明即 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)^*$ 与 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 等距同构.

习题 1.5 确定下述各空间是否依范数拓扑可分: $c_0(\mathbb{Z}^+)$, $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$, $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 和 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)^*$.

定义 $\mathscr{X}$ 的凸集 K 中某个元素 f 为 K 的一个端点是指 K 中无互异元素 f_1 和 f_2 使

$$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

习题 1.6 证明 $C(X)$ 中函数 f 是单位球的端点当且仅当诸 $x \in X$ 使 $|f(x)| = 1$.

习题 1.7 证明 $C(X)$ 的单位球中所有端点线性张成 $C(X)$.

习题 1.8 证明 $C[0,1]$ 的包含单位球中所有端点的最小闭凸集就是单位球, 并证明该结论对于 $C(X)^*$ 的单位球也成立.

习题 1.9 证明 $c_0(\mathbb{Z}^+)$ 的单位球没有端点. 确定 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 的单位球中每个端点. $L^1[0,1]$ 中单位球的端点又如何?

习题 1.10 设 K 是 $\mathscr{X}^*$ 的有界弱 * 闭凸集, 则诸 $f \in \mathscr{X}$ 使 $\{\varphi(f) : \varphi \in K\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的紧凸集. 而且, 若 λ_0 是 $\{\varphi(f_0) : \varphi \in K\}$ 的端点, 则集合 $\{\varphi \in K : \varphi(f_0) = \lambda_0\}$ 的端点都是 K 的端点.

习题 1.11 设 K 是 $\mathscr{X}^*$ 的有界弱 * 闭凸集, 则 K 有端点. (提示: 设 γ 是一个序数使 $\{f_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 是 $\mathscr{X}$ 上一个良序, 超限归纳地定义子集套 $\{K_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 使 $K_0 = K$

且

$$K_\alpha = \left\{ \varphi \in \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta : \varphi(f_\alpha) = \lambda_\alpha \right\},$$

其中 λ_α 是集合 $\left\{ \varphi(f_\alpha) : \varphi \in \bigcap\limits_{\beta<\alpha} K_\beta \right\}$ 的某个端点. 证明 $\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} K_\alpha$ 只含一点, 这点为 K 的端点.)

习题 1.12(Kreĭn-Mil'man) $\mathscr{X}^*$ 中有界弱 * 闭凸集是其端点全体的弱 * 闭凸包.

习题 1.13 证明 $\mathscr{X}^*$ 中单位球上相对弱 * 拓扑是可度量化的当且仅当 $\mathscr{X}$ 是可分的.

习题 1.14 设 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间, 而 x 是 $\mathscr{X}$ 中一个向量, 命

$$d = \inf\{\|x-y\| : y \in \mathscr{N}\}.$$

若 $d>0$, 则有个 $\varphi \in \mathscr{X}^*$ 使得诸 $y \in \mathscr{N}$ 满足 $\varphi(y)=0$, $\varphi(x)=1$ 且 $\|\varphi\| = 1/d$.

习题 1.15 对于 $f \in \mathscr{X}$ 和 $\varphi \in \mathscr{X}^*$, 命 $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$, 则 $\widehat{f}$ 属于 $\mathscr{X}^{**}$ 且 $f \mapsto \widehat{f}$ 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的一个等距算子 (称为典则映射).

定义 一个 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 为自反的是指 $\mathscr{X}$ 在上题中典则映射下的像是 $\mathscr{X}^{**}$.

习题 1.16 证明有限维 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 都是自反的, 但是空间 $c_0(\mathbb{Z}^+)$, $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 和 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 及 $C[0,1)$ 和 $L^1[0,1]$ 中没有一个是自反的.

习题 1.17 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 都是 Banach 空间, 在它们的代数直和 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 上定义 1 - 范数 $\|f \oplus g\| = \|f\| + \|g\|$ 和 ∞- 范数 $\|f \oplus g\|_\infty = \sup\{\|f\|, \|g\|\}$. 证明 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 在这两个范数下都是 Banach 空间, 并证明带 1 - 范数的 Banach 空间 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 的对偶空间是带 ∞- 范数的 Banach 空间 $\mathscr{X}^* \oplus \mathscr{Y}^*$.

习题 1.18 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 都是 Banach 空间, $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 是一个 Banach 空间且投影 $\pi_1 : \mathscr{X} \oplus \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ 和 $\pi_2 : \mathscr{X} \oplus \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ 连续. 证明带范数 $\|\cdot\|$ 的 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 和带 1-范数的 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 之间恒等映射是个拓扑同构. 因此, $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 上使 π_1 和 π_2 连续的完备范数拓扑与这样的范数选择无关.

习题 1.19(闭图像定理) 设 T 是从 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 到 Banach 空间 $\mathscr{Y}$ 的一个线性变换, 并使其图像 $\{(f, Tf) : f \in \mathscr{X}\}$ 是 $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ 的一个闭线性子空间, 则 T 是有界的. (提示: 考虑映射 $f \mapsto (f, Tf)$.)

习题 1.20 举例说明平面 $\mathbb{R}^2$ 中存在闭子集 K 使 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} nK = \mathbb{R}^2$ 而原点不是 K 的内点. 此例中我们是否还可以要求 K 包含 K 中诸点连接原点的线段?

习题 1.21 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 而 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中一个序列且 $\mathscr{X}$ 中诸向量 f 使 $\{\varphi_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个 Cauchy 数列, 则在弱 * 拓扑下, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$ 存在. 然而, 网没有相应的结果.

习题 1.22 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, φ 是 $\mathscr{X}$ 上线性泛函 (不必连续), 则 $\mathscr{X}^*$ 中存在网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得诸 $f\in\mathscr{X}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_\alpha(f)=\varphi(f)$.

习题 1.23 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 上的一个有界线性变换. 命 $\mathscr{M}=\ker T$, 证明商空间 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{Y}$ 拓扑同构.

定义 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 函数族 $\{\varphi\in\mathscr{X}^*\}$ 的诱导拓扑称为 $\mathscr{X}$ 上弱拓扑.

习题 1.24 证明 Banach 空间的线性子空间 $\mathscr{M}$ 是范数闭的当且仅当它是弱闭的. 进而, 证明 $\mathscr{X}$ 的单位球面是弱闭的当且仅当 $\mathscr{X}$ 是有限维的.

习题 1.25 证明 Banach 空间 $\mathscr{X}$(在典则映射下的像) 是 $\mathscr{X}^{**}$ 中弱 * 稠密集.

习题 1.26 证明 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 是自反的当且仅当 $\mathscr{X}^*$ 上弱拓扑与弱 * 拓扑相等.

习题 1.27 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 而 T 属于 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 对于任意 $\varphi\in\mathscr{Y}^*$, 证明 $f\mapsto\varphi(Tf)$ 定义了 $\mathscr{X}^*$ 中一个元 ψ. 再证 $T^*:\varphi\mapsto\psi$ 属于 $\mathfrak{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$. (称 T^* 为 T 的共轭.)

习题 1.28 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间且 T 属于 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 T 是一对一的当且仅当 T^* 有弱 * 稠密值域.

习题 1.29 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间且 T 属于 $\mathfrak{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 T 有闭值域当且仅当 T^* 有闭值域. (提示: 首先考虑 T 是一对一和到上的情形.)

定义 设 $\mathscr{M}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间, 规定 $\mathscr{M}$ 的零化子

$$\mathscr{M}^{\perp}=\{\varphi\in\mathscr{X}^*,\varphi(x)=0,x\in\mathscr{M}\}.$$

习题 1.30 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个闭线性子空间, 则 $\mathscr{M}^*$ 自然地等距同构于 $\mathscr{X}^*/\mathscr{M}^{\perp}$.

习题 1.31 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 的一个线性子空间, 则 $\mathscr{X}$ 有个线性子空间 $\mathscr{M}$ 使 $\mathscr{M}^{\perp}=\mathscr{N}$ 当且仅当 $\mathscr{N}$ 是个弱 * 闭集.

习题 1.32 若 Banach 空间 $M(X)$ 上线性泛函 φ 限制在 $M(X)$ 的单位球上在相对弱 * 拓扑下是连续的, 则 $C(X)$ 中存在函数 f 使

$$\varphi(\mu)=\int_X f\mathrm{d}\mu,\qquad \mu\in M(X).$$

(提示: 将 φ 在点测度 δ_x 处赋值获得 $f(x)$, 再利用如此事实: $M(X)$ 的单位球上存在弱 * 稠密集 $\{\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i} : n \geqslant 1, x_i \in X, a_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant 1\}$.)*

习题 1.33(Grothendieck)　线性泛函 $\varphi : \mathscr{X}^* \to \mathbb{C}$ 是弱 * 连续的当且仅当 φ 于单位球 $(\mathscr{X}^*)_1$ 的限制在相对弱 * 拓扑下是连续的. (提示: 先将 $\mathscr{X}$ 嵌至 $C(X)$, 再通过从 $M(X)$ 到商空间 $M(X)/\mathscr{X}^{\perp} = \mathscr{X}^*$ 的自然映射将 φ 扩张到 $M(X)$ 上, 然后再证明上题中 f 属于 $\mathscr{X}$.)

习题 1.34(Kreĭn-Smul'yan)　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 的一个线性子空间, 则 $\mathscr{M}$ 是弱 * 闭的当且仅当 $\mathscr{M} \bigcap (\mathscr{X}^*)_1$ 是弱 * 闭的. (提示: 证明 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 上一族弱 * 连续线性泛函的零空间的交.)

习题 1.35(Banach)　设 $\mathscr{X}$ 是可分 Banach 空间, 则 $\mathscr{X}^*$ 的线性子空间 $\mathscr{M}$ 是弱 * 闭的当且仅当 $\mathscr{M}$ 是弱 * 序列完备的.

习题 1.36　设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的代数张量积, 这是 $\mathbb{C}$ 上一个线性空间. 对于 $w \in \mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$, 规定

$$\|w\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\ \|y_i\| : n \geqslant 1, x_i \in \mathscr{X}, y_i \in \mathscr{Y}, w = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}.$$

证明 $\|\cdot\|_\pi$ 是 $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 上一个范数. 依此范数, $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 的完备化称为 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的射影张量积并记为 $\mathscr{X}\widehat{\otimes}\mathscr{Y}$.

习题 1.37　设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 对于 $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 中诸向量 w 规定

$$\|w\|_i = \sup\{|(\varphi \otimes \psi)(w)| : \varphi \in (\mathscr{X}^*)_1, \psi \in (\mathscr{Y}^*)_1\},$$

其中 $\varphi \otimes \psi$ 是 $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 上线性泛函使 $(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y)$. 证明 $\|\cdot\|_i$ 是代数张量积 $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 上一个范数. 依此范数, $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 的完备化称为 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的归纳张量积并记为 $\mathscr{X}\overline{\otimes}\mathscr{Y}$.

习题 1.38　设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 证明: $\mathscr{X} \otimes_a \mathscr{Y}$ 上恒等算子能扩张成从射影张量积 $\mathscr{X}\widehat{\otimes}\mathscr{Y}$ 至归纳张量积 $\mathscr{X}\overline{\otimes}\mathscr{Y}$ 的一个压缩算子.

习题 1.39　设 X 和 Y 是紧 Hausdorff 空间, 证明 $C(X)\overline{\otimes}C(Y) = C(X \times Y)$. (提示: 证明在 $\|\cdot\|_i$ 的定义中, 只需将 φ 和 ψ 分别取为 $\mathscr{X}^*$ 和 $\mathscr{Y}^*$ 中单位球的端点.)

习题 1.40　设 X 和 Y 是紧 Hausdorff 空间, 证明 $C(X)\widehat{\otimes}C(Y) = C(X \times Y)$ 当且仅当 X 或 Y 是有限的. (提示: 证明有函数 $h : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y)$ 使 $\|h\|_\infty = 1$, 但 $\|h\|_\pi$ 可以任意大.) 因此, 两个 Banach 空间的张量积不必唯一.

第 2 章　Banach 代数

2.1　在第 1 章, 我们证明了 $C(X)$ 是 Banach 空间并且每个 Banach 空间都同构于某个 $C(X)$ 的一个线性子空间. 另外, $C(X)$ 不仅是线性空间, 也是代数, 其乘法依范数拓扑连续. 本章中, 我们将 $C(X)$ 作为 Banach 代数讨论, 并说明 $C(X)$ 依某种意义是万有交换 Banach 代数 (之后给出说明), 我们将在一些例子中指出这个结果的用处和力量.

2.2　回顾一下, 在 1.1 节中我们观察到 $C(X)$ 关于点态乘法成为复数域 $\mathbb{C}$ 上一个代数, 并且对于 $C(X)$ 中所有函数 f 和 g, 上确界范数满足 $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, 这些性质使 $C(X)$ 成为一个所谓 Banach 代数.

在研究 Banach 空间时, 有界线性泛函的概念很重要. 对于 Banach 代数而言, 尤其对于 $C(X)$, 重点应关注可乘线性泛函的概念 (我们不假设其连续性, 因为我们之后会说明这样的泛函必然连续). 除了显然可乘的零泛函, 每个可乘线性泛函 φ 都使 $\varphi(1)=1$, 这是因为 φ 不恒为零意味着有个 $f\in C(X)$ 使 $\varphi(f)\neq 0$, 由等式 $\varphi(1)\varphi(f)=\varphi(f)$ 得到 $\varphi(1)=1$. 现在我们把注意力集中于 $C(X)$ 上满足 $\varphi(1)=1$ 的复可乘线性泛函集合 $M_{C(X)}$ 上. 对于 $x\in X$, 定义 $C(X)$ 上复泛函 $\varphi_x : f\mapsto f(x)$, 立即可知这样的泛函属于 $M_{C(X)}$.

以下命题表明从 X 到 $M_{C(X)}$ 的映射 $\psi : x\mapsto \varphi_x$ 是到上的.

2.3 命题　集合 $M_{C(X)}$ 是弱 * 拓扑空间 $C(X)^*$ 的子空间并且从 X 到 $M_{C(X)}$ 的映射 ψ 是一个到上同胚.

证明　任取 $\varphi\in M_{C(X)}$, 要找到 $x\in X$ 使 $\varphi=\varphi_x$, 如此可知它有范数 1. 命

$$\mathfrak{N}=\ker\varphi=\{f\in C(X):\varphi(f)=0\}.$$

我们先说明存在 $x\in X$ 使任意 $f\in\mathfrak{N}$ 满足 $f(x)=0$. 否则, 对任意 $x\in X$, 存在 $f_x\in\mathfrak{N}$ 使 $f_x(x)\neq 0$. 由于 f_x 连续, x 有邻域 U_x 使 f_x 在 U_x 上无零点. 于是紧空间 X 有开覆盖 $\{U_x : x\in X\}$, 取其有限子覆盖 $\{U_{x_1},\cdots,U_{x_N}\}$. 命 $g=\sum\limits_{n=1}^{N}\overline{f_{x_n}}f_{x_n}$, 则

$$\varphi(g)=\sum_{n=1}^{N}\varphi(\overline{f_{x_n}})\varphi(f_{x_n})=0,$$

这表明 g 属于 $\mathfrak{N}$. 然而 g 无零点, 它在 $C(X)$ 中可逆, 于是

$$\varphi(1)=\varphi(g)\varphi(1/g)=0,$$

矛盾. 因此存在 $x \in X$ 使任意 $f \in \mathfrak{R}$ 满足 $f(x) = 0$. 任意 $g \in C(X)$ 都使

$$\varphi(g - \varphi(g) \cdot 1) = \varphi(g) - \varphi(g) = 0,$$

而 $g - \varphi(g) \cdot 1$ 便属于 $\mathfrak{R}$. 在 x 赋值后得

$$g(x) - \varphi(g) = (g - \varphi(g) \cdot 1)(x) = 0.$$

可见, $M_{C(X)}$ 是 $C(X)^*$ 的子集. 取相对弱 * 拓扑后, 考虑映射 $\psi : X \to M_{C(X)}$. 如果 x 和 y 是 X 中不同点, 则由 Urysohn 引理知存在 $f \in C(X)$ 使 $f(x) \neq f(y)$, 因此

$$\begin{aligned}\psi(x)(f) = \varphi_x(f) = f(x)& \\ \neq f(y) = \varphi_y(f) = \psi(y)(f),&\end{aligned}$$

这表明 ψ 是一对一的.

为了说明 ψ 是连续的, 设 $\{x_\alpha\}$ 是 X 中收敛至 x 的网, 则 $C(X)$ 中诸函数 f 满足 $\lim\limits_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(x)$, 即 $\lim\limits_{\alpha \in A} \psi(x_\alpha)(f) = \psi(x)(f)$. 故网 $\psi(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 在弱 * 拓扑下收敛至 $\psi(x)$, 这样 ψ 便连续. 由于 ψ 是从一个紧空间到一个 Hausdorff 空间的一对一的连续到上映射, 所以 ψ 是个同胚. ■

以下我们陈述 Banach 代数的定义, 紧接着说明在 Banach 代数上可乘线性泛函全体总是能够以自然方式成为紧 Hausdorff 空间.

2.4 定义　复数域 $\mathbb{C}$ 上有单位元 1 的代数 $\mathfrak{B}$ 为 Banach 代数是指其上存在范数使其成为 Banach 空间, $\|1\| = 1$, 而且其中任意元素 f 和 g 都满足不等式 $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$.

我们就用 λ 表示复数 λ 乘单位元所得 $\mathfrak{B}$ 中元素. 以下基础命题将用来说明 $\mathfrak{B}$ 中可逆元全体是开集且其上逆运算在范数拓扑下是连续的.

2.5 命题　如果 f 是 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中一个元素使 $\|1 - f\| < 1$, 则 f 可逆且

$$\|f^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|1 - f\|}.$$

证明　命 $\eta = \|1 - f\|$, 则 $\eta < 1$. 当 $N > M$ 时,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n - \sum_{n=0}^{M}(1-f)^n\right\| = \left\|\sum_{n=M+1}^{N}(1-f)^n\right\| &\leqslant \sum_{n=M+1}^{N}\|1-f\|^n \\ &= \sum_{n=M+1}^{N}\eta^n \leqslant \frac{\eta^{M+1}}{1-\eta},\end{aligned}$$

因此部分和序列 $\left\{\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\right\}_{N=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列, 其极限记为 g, 则

$$\begin{aligned} fg &= \lim_{N\to\infty}\left([1-(1-f)]\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}(1-(1-f)^{N+1}) = 1, \end{aligned}$$

上式用到 $\lim_{N\to\infty}\|(1-f)^{N+1}\|=0$. 同理有 $gf=1$, 所以 f 可逆且 $f^{-1}=g$. 进而有

$$\begin{aligned} \|g\| &= \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\right\| \\ &\leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\|1-f\|^n = \frac{1}{1-\|1-f\|}. \end{aligned}$$

2.6 定义 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 以 $\mathscr{G}$ 记 $\mathfrak{B}$ 中可逆元组成的集合. 用 $\mathscr{G}_{\mathrm{l}}$ 和 $\mathscr{G}_{\mathrm{r}}$ 分别记 $\mathfrak{B}$ 中左可逆元与右可逆元组成的集合.

以下结果很有意义, 本章只用到有关 $\mathscr{G}$ 的结果, 而有关 $\mathscr{G}_{\mathrm{l}}$ 和 $\mathscr{G}_{\mathrm{r}}$ 的结果将在第 5 章讨论指标理论时用到.

2.7 命题 如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则 $\mathscr{G},\mathscr{G}_{\mathrm{l}},\mathscr{G}_{\mathrm{r}}$ 都是 $\mathfrak{B}$ 的开集.

证明 任取 $f\in\mathscr{G}$. 当 $g\in\mathscr{B}$ 满足 $\|f-g\|<1/\|f^{-1}\|$ 时,

$$1>\|f^{-1}\|\|f-g\|\geqslant\|1-f^{-1}g\|.$$

由前面的命题知 $f^{-1}g$ 属于 $\mathscr{G}$, 因此 $g=f(f^{-1}g)$ 也属于 $\mathscr{G}$. 可见, $\mathscr{G}$ 包含了其中诸元 f 为中心且 $1/\|f^{-1}\|$ 为半径的开球. 因此 $\mathscr{G}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个开集.

对于 $f\in\mathscr{G}_{\mathrm{l}}$, 有个 $h\in\mathfrak{B}$ 使 $hf=1$. 若 $\|f-g|<1/\|h\|$, 则

$$1>\|h\|\|f-g\|\geqslant\|hf-hg\|=\|1-hg\|.$$

再由前面命题知 $k=hg$ 可逆, 且由 $(k^{-1}h)g=1$ 知 g 左可逆, 即 $\mathscr{G}_{\mathrm{l}}$ 包含其中诸元 f 为中心且 $1/\|h\|$ 为半径的开球, 因此 $\mathscr{G}_{\mathrm{l}}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个开集. 同理 $\mathscr{G}_{\mathrm{r}}$ 也是 $\mathfrak{B}$ 的一个开集. ■

2.8 推论 若 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则 $\mathscr{G}$ 上映射 $f\mapsto f^{-1}$ 是连续的. 因此 $\mathscr{G}$ 是拓扑群.

证明 对于 $f\in\mathscr{G}$, 由 $\|f-g\|<1/(2\|f^{-1}\|)$ 可得 $\|1-f^{-1}g\|<1/2$, 据命题 2.5 知

$$\|(f^{-1}g)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|1-f^{-1}g\|}<2.$$

因此

$$\|g^{-1}\| = \|(f^{-1}g)^{-1}f^{-1}\| \leqslant 2\|f^{-1}\|,$$

于是

$$\begin{aligned}\|f^{-1} - g^{-1}\| &= \|f^{-1}(f-g)g^{-1}\| \\ &\leqslant 2\|f^{-1}\|^2\|f-g\|,\end{aligned}$$

这表明映射 $f \mapsto f^{-1}$ 是连续的. ■

在某些问题中, 还有一个重要的群.

2.9 命题 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, $\mathscr{G}$ 是其可逆元群, 而 $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 中单位元所在的连通分支, 则 $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的既开又闭的正规子群, 其陪集都是 $\mathscr{G}$ 的连通分支, 而商群 $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 是离散群.

证明 由于 $\mathscr{G}$ 是局部连通空间 $\mathfrak{B}$ 中一个开集, 其连通分支都是子空间 $\mathscr{G}$ 中既开又闭的集. 任取 $\mathscr{G}_0$ 中元素 f 和 g, 陪集 $f\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的连通子集且包含 fg 和 f, 因此 $\mathscr{G}_0 \bigcup f\mathscr{G}_0$ 是连通的, 从而含于 $\mathscr{G}_0$. 因此 fg 属于 $\mathscr{G}_0$, 而 $\mathscr{G}_0$ 便是半群. 类似可知 $\mathscr{G}_0 \bigcup f^{-1}\mathscr{G}_0$ 是连通的, 因此含于 $\mathscr{G}_0$. 可见, $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的一个子群.

对于 $h \in \mathscr{G}$, 共轭群 $h\mathscr{G}_0h^{-1}$ 是含单位元的连通子集, 因此 $h\mathscr{G}_0h^{-1} \subseteq \mathscr{G}_0$. 这样 $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的正规子群, 而 $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 是一个群. 又 $h\mathscr{G}_0$ 是开集也是 $\mathscr{G}$ 的闭连通子集, 故 $\mathscr{G}_0$ 的陪集是 $\mathscr{G}$ 的连通分支. 最后, 因为 $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的既开又闭的子集, 所以 $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 是离散的. ■

2.10 定义 如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则称商群 $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 为 $\mathfrak{B}$ 的抽象指标群且记为 $\Lambda_{\mathfrak{B}}$, 称 $\mathscr{G}$ 到 $\Lambda_{\mathfrak{B}}$ 的自然同态 γ 为抽象指标.

我们下面在某些细节方面考虑 Banach 代数的抽象指标群.

2.11 定义 如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则 $\mathfrak{B}$ 上指数映射记为 exp 并定义为

$$\exp f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n.$$

上述级数就像标量情形一样绝对收敛, 从而指数映射连续. 如果 $\mathfrak{B}$ 不交换, 则指数函数的许多熟悉性质就不成立了. 然而, 在有交换性条件时, 以下关键公式成立.

2.12 引理 设 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中某对元 f 和 g 交换, 则 $\exp(f+g) = \exp f \ \exp g$.

证明 将定义 $\exp f$ 和 $\exp g$ 的级数相乘, 然后重排. ■

在一般 Banach 代数中确定指数映射的值域即有 "对数" 的元素全体很困难. 以下引理给出了一个充分条件.

2.13 引理　如果 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中某元 f 满足条件 $\|1-f\|<1$, 则 f 属于 $\exp\mathfrak{B}$.

证明　命 $g=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})(1-f)^n$, 这个级数绝对收敛. 像标量情形那样将此代入 $\exp g$ 的级数展式后得 $\exp g=f$. ■

虽然对于任意 Banach 代数, 很难刻画 $\exp\mathfrak{B}$, 但其中元素的有限积全体则是个熟悉的对象.

2.14 定理　如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则 $\exp\mathfrak{B}$ 中元素的有限积全体是 $\mathscr{G}_0$.

证明　若记 $f=\exp g$, 则它有逆元 $\exp(-g)$. 这是因为由引理 2.12 得

$$f\exp(-g)=\exp(g-g)=1=\exp(-g)f.$$

进而, 从 $[0,1]$ 到 $\exp\mathfrak{B}$ 的映射 $\varphi:\lambda\mapsto\exp(\lambda g)$ 是连结 1 和 f 的一条道路, 故 f 属于 $\mathscr{G}_0$. 因此, $\exp\mathfrak{B}$ 含于 $\mathscr{G}_0$. 以 $\mathscr{F}$ 记 $\exp\mathfrak{B}$ 中元素的有限积全体, 它是 $\mathscr{G}_0$ 的一个子群. 据上述引理, $\mathscr{F}$ 包含开集且是一个子群, 故 $\mathscr{F}$ 是开集. 最后, 由于 $\mathscr{F}$ 的左陪集都是开集, 这样 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{G}_0$ 的既开又闭的集, 由于 $\mathscr{G}_0$ 是连通的, 我们得到 $\mathscr{G}_0=\mathscr{F}$. ■

以下推论说明刻画交换 Banach 代数中有对数的元素要简单得多.

2.15 推论　如果 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则 $\exp\mathfrak{B}=\mathscr{G}_0$.

证明　由引理 2.12, 如果 $\mathfrak{B}$ 交换, 则 $\exp\mathfrak{B}$ 是一个子群. ■

在继续讨论之前, 我们将 $C(X)$ 的抽象指标群和代数拓扑中一个熟悉的对象等同起来, 这种等同化事实上对任意交换 Banach 代数都有效, 但是我们不深入讨论 (参见 [40]).

2.16　设 X 是紧 Hausdorff 空间. 以 $\mathscr{G}$ 记 $C(X)$ 的可逆元群, 则 $C(X)$ 中一个函数 f 属于 $\mathscr{G}$ 当且仅当诸 $x\in X$ 使 $f(x)\neq 0$, 即 $\mathscr{G}$ 由 X 至 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的连续函数组成. 由于 $\mathscr{G}$ 是局部道路连通的, 一个函数 f 属于 $\mathscr{G}_0$ 当且仅当 $\mathscr{G}$ 中有个道路 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 使得 $f_0=1$ 且 $f_1=f$. 若从 $X\times[0,1]$ 到 $\mathbb{C}^*$ 定义一个连续函数 $F:(x,\lambda)\mapsto f_\lambda(x)$, 则诸 $x\in X$ 使 $F(x,0)=1$ 且 $F(x,1)=f(x)$, 因此 f 同伦于常值函数 1. 反之, 如果 g 是 $\mathscr{G}$ 中同伦于 1 的函数, 则 g 属于 $\mathscr{G}_0$. 类似可知 $\mathscr{G}$ 中两个函数 g_1 和 g_2 表示了 $\Lambda=\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 中相同元素当且仅当 g_1 和 g_2 同伦. 因此 Λ 是 X 到 $\mathbb{C}^*$ 的连续映射同伦类组成的群.

2.17 定义　如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则其第一个上同伦群 $\pi^1(X)$ 是 X 到单位圆周 $\mathbb{T}$ 的连续映射同伦类关于点态乘法组成的群.

2.18 定理　如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 的抽象指标群与 $\pi^1(X)$ 自然同构.

证明　从 X 到 $\mathbb{T}$ 的每个连续函数 f 一方面确定了 $\pi^1(X)$ 中一个元素 $\{f\}$; 另一方面它作为 $C(X)$ 中可逆元确定了一个陪集 $f\mathscr{G}_0$, 这是 Λ 中一个元素.

我们定义从 $\pi^1(X)$ 到 Λ 的映射 $\Phi:\{f\}\mapsto f\mathscr{G}_0$. 为证其合理性, 设 X 到 $\mathbb{T}$ 的连续函数 g 使 $\{f\}=\{g\}$, 即 f 同伦于 g, 则 $f\mathscr{G}_0=g\mathscr{G}_0$. 因为 $\pi^1(X)$ 和 $\mathscr{G}$ 中的乘法都是逐点定义的, 所以 Φ 是个同态. 还需证明它是一对一的和到上的.

为了证明 Φ 是到上的, 任取 $C(X)$ 中可逆元 f. 从 $X\times[0,1]$ 至 $\mathbb{C}^*$ 可建立一个连续函数 $F:(x,t)\mapsto f(x)/|f(x)|^t$. 对于 $x\in X$, 有 $F(x,0)=f(x)$. 显然, $g:x\mapsto F(x,1)$ 是连续幺模函数使 $f\mathscr{G}_0=g\mathscr{G}_0$. 因此 $\Phi(\{g\})=f\mathscr{G}_0$, 而 Φ 是到上的.

若 f 和 g 是 X 到 $\mathbb{T}$ 的连续函数使 $\Phi(\{f\})=\Phi(\{g\})$, 则 $\mathscr{G}$ 中有条道路连结 f 和 g, 即从 $X\times[0,1]$ 到 $\mathbb{C}^*$ 有连续函数 G 使诸 $x\in X$ 满足 $G(x,0)=f(x)$ 且 $G(x,1)=g(x)$. 于是, 从 $X\times[0,1]$ 至 $\mathbb{C}^*$ 有连续映射 $F:(x,t)\mapsto G(x,t)/|G(x,t)|$, 它在 X 到 $\mathbb{T}$ 的连续函数全体中建立了 f 和 g 的同伦关系, 故 $\{f\}=\{g\}$, 即 Φ 是一对一的. ■

以上结果常以略为不同的方式表述为以下推论.

2.19 推论　如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 的抽象指标群 Λ 自然同构于带整系数的第一 Čech 上同调群 $H^1(X,\mathbb{Z})$.

证明　代数拓扑 (参见 [67]) 证明了 $\pi^1(X)$ 和 $H^1(X,\mathbb{Z})$ 自然同构. ■

这些结果使我们能够确立简单交换 Banach 代数的抽象指标群.

2.20 推论　$C(\mathbb{T})$ 的抽象指标群同构于 $\mathbb{Z}$.

证明　但知 $\mathbb{T}$ 的第一上同伦群与第一同伦群同构, 后者同构于 $\mathbb{Z}$. ■

我们现在回到 Banach 代数的基本结构理论.

2.21 定义　Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 上复线性泛函 φ 为可乘的是指它满足以下条件:

(1)$\mathfrak{B}$ 中所有元素 f 和 g 满足等式 $\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g)$;

(2)$\varphi(1)=1$,

将 $\mathfrak{B}$ 上可乘线性泛函全体记为 $M=M_{\mathfrak{B}}$.

我们将要说明 M 中诸元是有界的且 M 是 $\mathfrak{B}$ 的对偶空间的单位球中弱 * 紧集, 之后我们将说明 M 在 $\mathfrak{B}$ 交换时非空.

2.22 命题　如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则诸 $\varphi\in M$ 使 $\|\varphi\|=1$.

证明　命 $\mathfrak{N}=\{f\in\mathfrak{B}:\varphi(f)=0\}$. 由 $\varphi(g-\varphi(g)\cdot 1)=0$ 知 $\mathfrak{B}$ 中诸元 g 都形如 $\lambda+f$ 使 λ 是个复数而 f 属于 $\mathfrak{N}$. 当 $\|1+h\|<1$ 时, 由命题 2.5 知 h 可逆, 于是 h 不属于 $\mathfrak{N}$. 因此,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|&=\sup_{g\neq 0}\frac{|\varphi(g)|}{\|g\|}=\sup_{\substack{f\in\mathfrak{N}\\ \lambda\neq 0}}\frac{|\varphi(\lambda+f)|}{\|\lambda+f\|}\\&=\sup_{\substack{f\in\mathfrak{N}\\ \lambda\neq 0}}\frac{|\lambda|}{\|\lambda+f\|}=\sup_{h\in\mathfrak{N}}\frac{1}{\|1+h\|}=1.\end{aligned}$$

■

无论什么时候, 当我们从代数假设中获取拓扑性质时, 完备性通常是至关重要的. 完备性的作用在定理 1.42 的证明中是明显的, 但在上述命题中完备性所起的作用不太明显.

2.23 命题 如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则 M 是 $(\mathfrak{B}^*)_1$ 的弱 * 紧集.

证明 由定理 1.23, 说明 M 是 $(\mathfrak{B}^*)_1$ 的一个弱 * 闭集即可. 设 M 中网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 在 $(\mathfrak{B}^*)_1$ 的弱 * 拓扑下收敛至 $(\mathfrak{B}^*)_1$ 中 φ, 要证 φ 是可乘的且 $\varphi(1)=1$. 为此, 计算得

$$\varphi(1)=\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(1)=\lim_{\alpha\in A}1=1.$$

又对于 $\mathfrak{B}$ 中所有元素 f 和 g, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(fg)&=\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(fg)=\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(f)\varphi_\alpha(g)\\&=\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(f)\lim_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(g)=\varphi(f)\varphi(g).\end{aligned}$$

可见, φ 属于 M. ■

上述命题表明 M 在相对弱 * 拓扑下是紧 Hausdorff 空间. 回顾一下, $\mathfrak{B}$ 中诸元 f 通过等式 $\widehat{f}(\varphi)=\varphi(f)$ 都确定了一个弱 * 连续函数 $\widehat{f}:(\mathfrak{B}^*)_1\to\mathbb{C}$, 由于 M 含于 $(\mathfrak{B}^*)_1$, 所以 $\widehat{f}|_M$ 也是连续的. 我们将此总结在以下概念中.

2.24 定义 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数使 $M\neq\varnothing$. 对于 $\mathfrak{B}$ 中诸元 f 和 M 中诸元 φ, 命 $\Gamma(f)(\varphi)=\varphi(f)$, 即 $\Gamma f=\widehat{f}|_M$. 所得映射 $\Gamma:\mathfrak{B}\to C(X)$ 称为 Gelfand 变换.

2.25 Gelfand 变换的基本性质 若 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, Γ 是其 Gelfand 变换, 则

(1) Γ 是代数同态;

(2) 诸 $f\in\mathfrak{B}$ 使 $\|\Gamma f\|_\infty\leqslant\|f\|$.

证明 使 Γ 成为代数同态的条件中, 只有可乘性不明显, 其证法如下: 对于 $\mathfrak{B}$ 中任意元素 f 和 g, 我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(fg)(\varphi)&=\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g)\\&=\Gamma(f)(\varphi)\cdot\Gamma(g)(\varphi)=[\Gamma(f)\Gamma(g)](\varphi),\end{aligned}$$

因此 Γ 是可乘的. 为了说明其压缩性, 任取 $f\in\mathfrak{B}$, 则

$$\|\Gamma f\|_\infty=\|\widehat{f}|_M\|_\infty\leqslant\|\widehat{f}\|_\infty=\|f\|.$$

可见, Γ 是压缩代数同态. ■

2.26 继续讨论之前, 关于 Gelfand 变换我们要评论几句. 首先注意, Γ 将形如 $fg-gf$ 的诸元映为 0. 因此在 $\mathfrak{B}$ 不交换时, Γ 的值域这个子代数可能不反映 $\mathfrak{B}$

的性质 (在本章末有习题表明某些 Banach 代数可使 M 为空集). 然而在交换情形, M 不仅不空而且还足够大使 $\mathfrak{B}$ 中元素 f 的可逆性由 $C(X)$ 中元素 Γf 的可逆性所确定. 这个事实使 Gelfand 变换成为研究交换 Banach 代数的强有力工具.

为了建立 Gelfand 变换的上述深刻性质, 我们必须首先考虑谱理论. 以下讨论中除非有必要, 我们不假设 $\mathfrak{B}$ 交换.

2.27 定义　设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 其中诸元 f 的谱为以下集合:

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda \text{ 在 } \mathfrak{B} \text{ 中不可逆}\},$$

而 f 的预解集是集合

$$\rho_{\mathfrak{B}}(f) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathfrak{B}}(f).$$

进而, 规定 f 的谱半径如下:

$$r_{\mathfrak{B}}(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(f)\}.$$

当实际问题中不产生混淆时, 我们省略下标 $\mathfrak{B}$, 仅写 $\sigma(f), \rho(f), r(f)$. 以下基本命题说明 $\sigma(f)$ 是紧的, 其非空性是很深刻的结论且是下一个定理的内容.

2.28 命题　如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数且 f 属于 $\mathfrak{B}$, 则 $\sigma(f)$ 是紧的且 $r(f) \leqslant \|f\|$.

证明　若函数 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathfrak{B}$ 由 $\varphi(\lambda) = f - \lambda$ 定义, 则它连续. 由于 $\mathscr{G}$ 是开集, 因此 $\rho(f) = \varphi^{-1}(\mathscr{G})$ 是开集, 而集合 $\sigma(f)$ 便是闭集. 如果 $|\lambda| > \|f\|$, 则

$$1 > \frac{\|f\|}{|\lambda|} = \left\|\frac{f}{\lambda}\right\| = \left\|1 - \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)\right\|.$$

于是由命题 2.5 知 $1 - f/\lambda$ 可逆, 即 $\lambda - f$ 可逆, 因此 λ 属于 $\rho(f)$. 故 $\sigma(f)$ 是有界闭集从而是紧集, 且 $r(f) \leqslant \|f\|$. ■

2.29 定理　如果 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则其中诸元 f 的谱 $\sigma(f)$ 非空.

证明　考虑由 $F(\lambda) = (f - \lambda)^{-1}$ 定义的函数 $F : \rho(f) \to \mathfrak{B}$, 我们说明它是 $\mathfrak{B}$-值解析函数并且在无限远处有界. 倘若 $\sigma(f)$ 是空集, 即 $\rho(f) = \mathbb{C}$, 应用 Liouville 定理可得矛盾.

首先, 由于 $\mathscr{G}$ 上逆运算是连续的, 故对于 $\lambda_0 \in \rho(f)$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(f - \lambda_0)^{-1}[(f - \lambda_0) - (f - \lambda)](f - \lambda)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} (f - \lambda_0)^{-1}(f - \lambda)^{-1} = (f - \lambda_0)^{-2}.\end{aligned}$$

特别地, 对于对偶空间 $\mathfrak{B}^*$ 中任意 φ, 复合函数 φF 是 $\rho(f)$ 上复值解析函数.

当 $|\lambda| > \|f\|$ 时, 据命题 2.5 知 $1 - f/\lambda$ 可逆且

$$\left\|\left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|f/\lambda\|}.$$

因而

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\|F(\lambda)\| &= \lim_{\lambda\to\infty}\left\|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{f}{\lambda}-1\right)^{-1}\right\| \\ &\leqslant \limsup_{|\lambda|\to\infty}\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\|f/\lambda\|}=0.\end{aligned}$$

这样对于 $\varphi\in\mathfrak{B}^*$, 有 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi(F(\lambda))=0$.

如果 $\rho(f)=\mathbb{C}$, 由上述结论知诸 $\varphi\in\mathfrak{B}^*$ 使 φF 是整函数且在无穷远处有极限 0. 由 Liouville 定理知 φF 恒为零. 特别地, 诸 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和诸 $\varphi\in\mathfrak{B}^*$ 使 $\varphi(F(\lambda))=0$. 由推论 1.28 得 $F(\lambda)=0$. 这是个矛盾, 原因在于 $F(\lambda)$ 按定义是 $\mathfrak{B}$ 中可逆元素. 因此 $\sigma(f)$ 非空. ■

请注意, 虽然未假设 $\mathfrak{B}$ 交换, 但由 1, f 和形如 $(f-\lambda)^{-1}$ 的元素生成 $\mathfrak{B}$ 的子代数交换, 而上述结果实际上只与这个子代数有关.

2.30 以下定理容易由上述结论立刻可得, 并且在确立 Gelfand 变换的预期性质时至关重要. 回顾一下, 非零元都可逆的代数称为可除代数.

2.31 定理 (Gelfand-Mazur) 每个可除 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathbb{C}$ 上都有唯一等距同构.

证明 若 f 属于 $\mathfrak{B}$, 由上述定理知 $\sigma(f)$ 非空. 若 λ_f 属于 $\sigma(f)$, 由定义知 $f-\lambda_f$ 不可逆. 由于 $\mathfrak{B}$ 是可除的, 故 $f-\lambda_f=0$. 而当 $\lambda\neq\lambda_f$ 时, 有 $f-\lambda=\lambda_f-\lambda$, 它可逆. 因此诸 $f\in\mathfrak{B}$ 的谱 $\sigma(f)$ 恰好由一个复数 λ_f 组成, 而映射 $\psi:f\mapsto\lambda_f$ 便是 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathbb{C}$ 的等距同构. 又若 ψ' 也是 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathbb{C}$ 的等距同构, 则 $\psi'(f)$ 应属于 $\sigma(f)$, 所以 $\psi(f)=\psi'(f)$. ■

2.32 商代数 我们现在考虑商代数. 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, $\mathfrak{M}$ 是其一个闭双边理想. 由于 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的闭线性子空间, 根据 1.39 节我们能够在商空间 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 上定义范数使它成为一个 Banach 空间. 又由 $\mathfrak{M}$ 是双边理想知 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 是代数. 在我们能够断定 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 是 Banach 代数前, 还需验证两个事实.

首先, 我们需要说明 $\|[1]\|=1$. 其证法如此: 当 $\|1-g\|<1$ 时, 由命题 2.5 知 g 可逆, 故

$$\|[1]\|=\inf_{g\in\mathfrak{M}}\|1-g\|=1.$$

其次, 对于 $\mathfrak{B}$ 中元素 f 和 g, 应有 $\|[f][g]\|\leqslant\|[f]\|\|[g]\|$. 事实上

$$\begin{aligned}\|[f][g]\| &= \|[fg]\| = \inf_{g\in\mathfrak{M}}\|fg-h\| \\ &\leqslant \inf_{h_1,h_2\in\mathfrak{M}}\|(f-h_1)(g-h_2)\| \\ &\leqslant \inf_{h_1\in\mathfrak{M}}\|f-h_1\|\inf_{h_2\in\mathfrak{M}}\|g-h_2\| \\ &= \|[f]\|\,\|[g]\|.\end{aligned}$$

可见, $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 是 Banach 代数并且自然映射 $f \mapsto [f]$ 是压缩同态.

2.33 命题　如果 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则 $\mathfrak{B}$ 上可乘线性泛函集合 M 与 $\mathfrak{B}$ 的极大双边真理想全体一一对应.

证明　对于 $\mathfrak{B}$ 上非零可乘线性泛函 φ, 作同态核 $\mathfrak{N} = \ker\varphi$, 它是真双边理想. 对于 $f \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{N}$, 有

$$1 = \left(1 - \frac{f}{\varphi(f)}\right) + \frac{f}{\varphi(f)}.$$

由于 $1 - f/\varphi(f)$ 属于 $\mathfrak{N}$, 故 f 与 $\mathfrak{N}$ 的线性包中有单位元 1. 于是包含了 f 和 $\mathfrak{N}$ 的理想必然是整个 $\mathfrak{B}$, 所以 $\mathfrak{N}$ 是双边极大真理想. 下证 $\varphi \mapsto \ker\varphi$ 是一个满足要求的对应.

为证对应 $\varphi \mapsto \ker\varphi$ 是到上的, 假设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个极大双边真理想. 因 $\mathfrak{M}$ 中诸元 f 都不可逆, 由命题 2.5 知 $\|1 - f\| \geqslant 1$, 故 1 不属于 $\mathfrak{M}$ 的闭包. 又 $\mathfrak{M}$ 的闭包明显也是个双边理想且 $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}} \neq \mathfrak{B}$, 因此 $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$ 而 $\mathfrak{M}$ 便是个闭集. 因为 $\mathfrak{M}$ 极大且 $\mathfrak{B}$ 交换, 所以商代数 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 是个可除 Banach 代数. 由定理 2.31, 从 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 到 $\mathbb{C}$ 存在自然等距同构 ψ. 以 π 记 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ 的自然同态, 则复合 $\varphi = \psi\pi$ 就是 $\mathfrak{B}$ 上一个非零可乘线性泛函使 φ 属于 M 且 $\mathfrak{M} = \ker\varphi$.

最后, 还需要说明对应 $\varphi \mapsto \ker\varphi$ 是一对一的. 如果 φ_1 和 φ_2 都属于 M 使

$$\ker\varphi_1 = \mathfrak{M} = \ker\varphi_2,$$

则对任意 $f \in \mathfrak{B}$ 有

$$\varphi_1(f) - \varphi_2(f) = (f - \varphi_2(f)) - (f - \varphi_1(f)),$$

它既属于 $\mathfrak{M}$ 也是单位元的数乘, 故必然是 0. 因此, $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

上述最后一个命题是之前内容中唯一要求 $\mathfrak{B}$ 有交换性假设的.

从此以后, 我们以 $M_{\mathfrak{B}}$ 记 $\mathfrak{B}$ 的极大理想空间.

2.34 命题　设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 其中元素 f 可逆当且仅当 $C(M)$ 中元素 Γf 可逆.

证明　如果 f 在 $\mathfrak{B}$ 中可逆, 则 $\Gamma(f^{-1})$ 是 Γf 的逆元.

如果 f 不可逆, 则 $\mathfrak{M}_0 = \{gf : g \in \mathfrak{B}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的理想且不含单位元. 由于 $\mathfrak{B}$ 交换, $\mathfrak{M}_0$ 含于某个极大理想 $\mathfrak{M}$ 中. 由上述命题知存在 $\varphi \in M$ 使 $\ker\varphi = \mathfrak{M}$. 因此 $\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f) = 0$, 而 Γf 在 $C(M)$ 中便不可逆. ■

在交换情形下, 我们将上述几个命题总结为以下定理.

2.35 定理 (Gelfand)　设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, M 是其极大理想空间, 而 $\Gamma : \mathfrak{B} \to C(M)$ 是 Gelfand 变换, 则

(1) M 非空;

(2) Γ 是个代数同态;

(3) 诸 $f \in \mathfrak{B}$ 使 $\|\Gamma f\|_\infty \leqslant \|f\|$;

(4) f 在 $\mathfrak{B}$ 中可逆当且仅当 Γf 在 $C(M)$ 中可逆.

有关上述结论 (4) 的关键事实是它只涉及 Γf 在 $C(M)$ 中的可逆性, 而不提及在 Γ 的值域中的可逆性.

在得到有关谱半径的公式之前, 由上述结果我们可得两个推论如下.

2.36 推论　交换 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中诸元 f 满足 $\sigma(f) = \mathrm{ran}\Gamma f$ 且 $r(f) = \|\Gamma f\|_\infty$.

证明　当复数 λ 不属于 $\sigma(f)$ 时, 按定义 $f-\lambda$ 于 $\mathfrak{B}$ 可逆, 而 $\Gamma f-\lambda$ 便于 $C(M)$ 可逆, 后者表明诸 $\varphi \in M$ 使 $(\Gamma f-\lambda)(\varphi) \neq 0$ 即 $\Gamma f(\varphi) \neq \lambda$. 反之, 如果 λ 不属于 Γf 的值域, 则 $\Gamma f-\lambda$ 在 $C(M)$ 中可逆, 因此由上述定理知 $f-\lambda$ 在 $\mathfrak{B}$ 中可逆, 这样 λ 不属于 $\sigma(f)$. ■

设 $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是复系数整函数, 而 f 在 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中, 则正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\|f\|^n$ 收敛表明 $\mathfrak{B}$ 中级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f^n$ 绝对可和, 其和记为 $\varphi(f)$.

2.37 推论 (谱映射定理)　设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, 则对于其中元素 f 和 $\mathbb{C}$ 上整函数 φ 有

$$\sigma(\varphi(f)) = \varphi(\sigma(f)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

证明　由 1 和 f 及 $\{(f-\lambda)^{-1} : \lambda \in \rho(f)\}$ 和 $\{(\varphi(f)-\mu)^{-1} : \mu \in \rho(\varphi(f))\}$ 在 $\mathfrak{B}$ 中生成的闭子代数 $\mathfrak{B}_0$ 是交换的, $\sigma_{\mathfrak{B}}(f) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(f)$ 且 $\sigma_{\mathfrak{B}}(\varphi(f)) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(\varphi(f))$. 于是我们可以假设 $\mathfrak{B}$ 交换, 从而可用 Gelfand 变换. 据 φ 的连续性知 $\Gamma(\varphi(f)) = \varphi(\Gamma f)$. 据上述推论得

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi(f)) &= \mathrm{ran}\Gamma(\varphi(f)) = \mathrm{ran}\varphi(\Gamma f)\\ &= \varphi(\mathrm{ran}\Gamma f) = \varphi(\sigma(f)).\end{aligned}$$

证毕. ■

我们下面证明 Beurling 和 Gelfand 所得谱半径与范数有关的一个基本结果.

2.38 定理　设 f 是 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 中任意元素, 则 $r_{\mathfrak{B}}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证明　以 $\mathfrak{B}_0$ 记 $\mathfrak{B}$ 中单位元 1, f 和 $\{(f^n-\lambda)^{-1} : \lambda \in \rho(f^n), n \in \mathbb{Z}^+\}$ 生成的闭子代数, 则 $\mathfrak{B}_0$ 交换且对于每个正整数 n, 有 $\sigma_{\mathfrak{B}_0}(f^n) = \sigma_{\mathfrak{B}}(f^n)$. 由谱映射定理得 $\sigma_{\mathfrak{B}_0}(f^n) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(f)^n$, 故

$$r_{\mathfrak{B}}(f)^n = r_{\mathfrak{B}_0}(f^n) \leqslant \|f^n\|,$$

由此得不等式 $r_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$.

下面考虑解析函数 $G:\lambda\mapsto -\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^n}{\lambda^n}$, 右端级数据命题 1.9 在 $|\lambda|>\|f\|$ 时收敛, 其极限是 $(f-\lambda)^{-1}$. 对于 $\varphi\in\mathfrak{B}^*$, 当 $|\lambda|>r_{\mathfrak{B}}(f)$ 时, 函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi\left(\dfrac{f^n}{\lambda^{n-1}}\right)$ 等于 $\varphi((\lambda-f)^{-1})$, 这是 λ 的解析函数. 由级数收敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\lambda^{1-n}f^n)=0$. 由一致有界性定理 (定理 1.44) 知存在数 M_λ 使得诸 n 满足 $\|\lambda^{1-n}f^n\|\leqslant M_\lambda$. 因此

$$\limsup_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\limsup_{n\to\infty}M_\lambda^{\frac{1}{n}}|\lambda^n|^{\frac{1}{n}}=|\lambda|.$$

于是

$$r_{\mathfrak{B}}(f)\geqslant\limsup_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}}\geqslant\liminf_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}}\geqslant r_{\mathfrak{B}}(f),$$

结论得证. ■

2.39 推论　设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则其 Gelfand 变换 Γ 是等距的当且仅当其中诸元 f 使 $\|f^2\|=\|f\|^2$.

证明　由推论 2.36 知 $r(f)=\|\Gamma f\|$, 我们看到 Γ 是等距的当且仅当 $\mathfrak{B}$ 中诸元 f 满足等式 $r(f)=\|f\|$. 而由推论 2.37 知 $r(f^2)=r(f)^2$, 故定理结论成立. ■

对于紧 Hausdorff 空间 X, 我们从 Stone 对于 Weierstrass 有关多项式稠密性的经典定理推广开始研究 $C(X)$ 的自共轭子代数. 所谓 $C(X)$ 的子集 $\mathfrak{A}$ 为自共轭的是指由 $f\in\mathfrak{A}$ 可得 $\overline{f}$ 属于 $\mathfrak{A}$.

2.40 定理 (Stone-Weierstrass)　设 X 是紧 Hausdorff 空间, 而 $C(X)$ 的一个自共轭闭子代数 $\mathfrak{A}$ 分离 X 中的点且包含常值函数 1, 则 $\mathfrak{A}=C(X)$.

证明　以 $\mathfrak{A}_r$ 记 $\mathfrak{A}$ 中实函数全体, 它是 $C_r(X)$ 的闭子代数、分离 X 的点且包含常值函数 1, 于是定理证明简化为说明 $\mathfrak{A}_r=C_r(X)$.

我们先证诸 $f\in\mathfrak{A}_r$ 使 $|f|$ 属于 $\mathfrak{A}_r$. 回顾一下, $[-1,1]$ 上函数 $\varphi:t\mapsto(1-t)^{\frac{1}{2}}$ 的级数展式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_nt^n$ 中 $\alpha_n=(-1)^n\dbinom{1/2}{n}$. 当 $0<\delta<1$ 时, 由比较定理易知序列 $\left\{\sum\limits_{n=0}^{N}\alpha_nt^n\right\}_{N=1}^{\infty}$ 在闭区间 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛至 φ(这个序列实际上在 $[-1,1]$ 上一致收敛至 φ). 可设 $\|f\|_\infty\leqslant 1$. 当 $0<\delta<1$ 时, 命 $g_\delta=\delta+(1-\delta)f^2$, 则

$$0\leqslant 1-g_\delta\leqslant 1-\delta.$$

命 $h_N=\sum\limits_{n=0}^{N}\alpha_n(1-g_\delta)^n$, 则 h_N 属于 $\mathfrak{A}_r$ 且

$$\begin{aligned}\left\|h_N-(g_\delta)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty&=\sup_{x\in X}\left|\sum_{n=0}^{N}\alpha_n(1-g_\delta(x))^n-\varphi(1-g_\delta(x))\right|\\&\leqslant\sup_{t\in[0,1-\delta]}\left|\sum_{n=0}^{N}\alpha_nt^n-\varphi(t)\right|.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{N\to\infty}\left\|h_N-(g_\delta)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty=0$, 这表明 $(g_\delta)^{\frac{1}{2}}$ 属于 $\mathfrak{A}_r$. 由于平方根函数在 $[0,1]$ 上一致连续, 故 $\lim_{\delta\to 0}\left\||f|-(g_\delta)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty=0$, 所以 $|f|$ 属于 $\mathfrak{A}_r$.

我们往证 $\mathfrak{A}_r$ 是向量格, 即 $\mathfrak{A}_r$ 中任意 f 和 g 都使 $f\vee g$ 和 $f\wedge g$ 属于 $\mathfrak{A}_r$, 此处

$$f\vee g: x\mapsto \max\{f(x),g(x)\},$$
$$f\wedge g: x\mapsto \min\{f(x),g(x)\}.$$

这源自以下可以逐点验证的两个等式

$$f\vee g=\frac{f+g+|f-g|}{2},$$
$$f\wedge g=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

我们进而证有函数 $g\in\mathfrak{A}_r$ 在 X 中任意不同两点 x 和 y 处能取到预定的实数值 a 和 b, 即 $g(x)=a$ 且 $g(y)=b$. 为此取 $f\in\mathfrak{A}_r$ 使 $f(x)\neq f(y)$, 只需命

$$g(z)=a+(b-a)\frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)}.$$

现在我们完成定理的证明. 任给 $f\in C_r(X)$ 和 $\varepsilon>0$. 任意固定 $x\in X$. 对于每个 $y\in X$, 都有个 $g_y\in\mathfrak{A}_r$ 使 $g_y(x)=f(x)$ 且 $g_y(y)=f(y)$. 由于 f 和 g 都连续, 故 y 有开邻域 U_y 使诸 $z\in U_y$ 满足 $g_y(z)\leqslant f(z)+\varepsilon$. 开集族 $\{U_y: y\in X\}$ 覆盖了 X. 由紧性得有限子覆盖 $\{U_{y_1},U_{y_2},\cdots,U_{y_n}\}$, 命 $h_x=g_{y_1}\wedge g_{y_2}\wedge\cdots\wedge g_{y_n}$.

因此对于每个 $x\in X$, 上述方法构造的 h_x 属于 $\mathfrak{A}_r$, $h_x(x)=f(x)$ 且 X 中诸点 z 满足 $h_x(z)\leqslant f(z)+\varepsilon$. 由于 h_x 和 f 都连续, 故 x 有开邻域 V_x 使诸 $z\in V_x$ 满足 $h_x(z)\geqslant f(z)-\varepsilon$. 同样, 开集族 $\{V_x: x\in X\}$ 覆盖了 X, 取其有限子覆盖 $\{V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_m}\}$. 命 $k=h_{x_1}\vee h_{x_2}\vee\cdots\vee h_{x_m}$, 则 k 属于 $\mathfrak{A}_r$ 且 X 中诸点 z 满足 $f(z)-\varepsilon\leqslant k(z)\leqslant f(z)+\varepsilon$. 可见, $\|f-k\|_\infty\leqslant\varepsilon$. 证毕. ■

2.41　如果 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个闭区间, 则复系数多项式 $\sum_{n=0}^{N}\alpha_n t^n$ 全体是 $C[a,b]$ 的一个自共轭子代数, 它分离点且包含常数 1, 它据上述结论有闭包 $C[a,b]$. 这正是 Weierstrass 定理的内容.

我们现在考虑 $C(X)$ 的包含 1 但不分离点的自共轭闭子代数, 并说明它们能够成为某个紧 Hausdorff 空间 Y 上连续函数代数 $C(Y)$.

设 X 是紧 Hausdorff 空间, $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 的包含 1 的闭子代数. 对于 $x\in X$, 我们以 φ_x 记 $\mathfrak{A}$ 上可乘线性泛函 $\varphi_x: f\mapsto f(x)$. 以下命题即使在非自共轭情形也是有意义的.

2.42 命题　从 X 到 $M_{\mathfrak{A}}$ 的映射 $\eta: x\mapsto\varphi_x$ 是连续的.

证明　设 X 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 收敛至 x, 则诸 $f\in\mathfrak{A}$ 使 $\lim\limits_{\alpha\in A}f(x_\alpha)=f(x)$, 这相当于 $\lim\limits_{\alpha\in A}\varphi_{x_\alpha}(f)=\varphi_x(f)$. 因此依 $M_{\mathfrak{A}}$ 上拓扑有 $\lim\limits_{\alpha\in A}\eta(x_\alpha)=\eta(x)$. 可见, η 连续. ■

多数情形下, η 既不一对一也不到上. 然而, 它在 $\mathfrak{A}$ 自共轭时是到上的.

2.43 命题　如果 $\mathfrak{A}$ 是自共轭的, 则 η 将 X 映满 $M_{\mathfrak{A}}$.

证明　任取 $\varphi\in M_{\mathfrak{A}}$, 对于 $f\in\mathfrak{A}$, 命 $K_f=\{x\in X: f(x)=\varphi(f)\}$. 首先, 由于 f 是连续的, K_f 是 X 的一个闭集; 其次, 我们要说明不仅诸 K_f 非空, 而且集族 $\{K_f: f\in\mathfrak{A}\}$ 具备有限交性质. 否则, $\mathfrak{A}$ 中有些函数 $f_1,\cdots,f_n$ 使

$$K_{f_1}\cap K_{f_2}\cap\cdots\cap K_{f_n}=\varnothing,$$

而函数 $g: x\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}|f_i(x)-\varphi(f_i)|^2$ 便无零点. 因 $\mathfrak{A}$ 是自共轭代数, 故 g 属于 $\mathfrak{A}$. 但 g 总取正实值且 X 是紧的, 便有个 $\varepsilon>0$ 使 $1\geqslant\dfrac{g(x)}{\|g\|_\infty}\geqslant\varepsilon$, 故 $\left\|1-\dfrac{g}{\|g\|_\infty}\right\|_\infty<1$. 由命题 2.5 知 g^{-1} 属于 $\mathfrak{A}$, 故 $\varphi(g)\neq 0$. 然而,

$$\varphi(g)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(\overline{f_i-\varphi(f_i)})(\varphi(f_i)-\varphi(f_i))=0,$$

这是矛盾. 可见, $\{K_f: f\in\mathfrak{A}\}$ 具备有限相交性质, 其交点 x 便使 $\eta(x)=\varphi$. ■

读者应当仔细考虑 $\mathfrak{A}$ 的自共轭性是如何用于上述证明的. 本章中我们将举例说明 η 可以不到上, 甚至举例说明即使 η 到上, Gelfand 变换也不必到上. 然而, 自共轭子代数的 Gelfand 变换是到上的.

2.44 命题　如果 $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 的包含常值函数的一个自共轭闭子代数, 则从 $\mathfrak{A}$ 到 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 的 Gelfand 变换 Γ 是一个等距同构.

证明　对于 $f\in\mathfrak{A}$, 由于 X 紧, 存在 $x_0\in X$ 使 $|f(x_0)|=\|f\|_\infty$. 因此

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty\geqslant\|\Gamma f\|_\infty&=\sup_{\varphi\in M_{\mathfrak{A}}}|(\Gamma f)(\varphi)|\\&\geqslant|(\Gamma f)(\eta x_0)|=|f(x_0)|=\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

故 Γ 是等距的. 又 Γ 是代数同态, 只需要证明 Γ 是到上的. 因为 $\Gamma 1=1$, Γ 的值域是 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 的包含常值函数 1 的子代数. 因 Γ 是等距的, 其值域是一致闭的且分离点. 进而由上述命题, 对于 $\varphi\in M_{\mathfrak{A}}$, 存在 $x\in X$ 使 $\eta(x)=\varphi$, 于是对于 $f\in\mathfrak{A}$, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(f)}(\varphi)&=\overline{\Gamma(f)(\varphi)}=\overline{\Gamma(f)(\eta(x))}\\&=\overline{f(x)}=\overline{f}(x)=\Gamma(\overline{f})(\eta(x))=\Gamma(\overline{f})(\varphi).\end{aligned}$$

可见, $\overline{\Gamma f}=\Gamma\overline{f}$. 结合 $\mathfrak{A}$ 的自共轭性知 $\Gamma\mathfrak{A}$ 是自共轭的. 据 Stone-Weierstrass 定理知 $\Gamma\mathfrak{A}=C(M_{\mathfrak{A}})$. 证毕 ■

2.45 引理 设 X 和 Y 都是紧 Hausdorff 空间, θ 是一个从 X 到 Y 上的连续映射, 则从 $C(Y)$ 到 $C(X)$ 的映射 $\theta^*: f \mapsto f \circ \theta$ 是等距同态, 其值域由在 X 的闭划分 $\{\theta^{-1}(y): y \in Y\}$ 中诸子集上为常数的连续函数构成.

证明 显然 θ^* 是等距同态, 而形如 $f \circ \theta$ 的函数在诸闭集 $\theta^{-1}(y)$ 上明显是常数. 现在假设 X 上连续函数 g 在诸 $\theta^{-1}(y)(y \in Y)$ 上都是常数, 则我们能在 Y 上明确定义一个函数 f 使 $f \circ \theta = g$, 仅有的问题为 f 是否连续. 因 θ 是满射, 对于 $\mathbb{C}$ 的任何子集 T, 有 $f^{-1}(T) = \theta(g^{-1}(T))$. 注意到 θ 是闭映射且 g 连续, 当 T 是 $\mathbb{C}$ 的闭集时, $f^{-1}(T)$ 是 Y 的闭集. 可见, f 连续. ■

2.46 命题 设 $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 的一个自共轭闭子代数且包含常值函数, η 是前面从 X 到 $M_{\mathfrak{A}}$ 上的连续映射, 则 η^* 是 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 到 $\mathfrak{A}$ 上的等距同构且是 Gelfand 变换 Γ 的左逆.

证明 先证诸 $f \in \mathfrak{A}$ 使 $\eta^*(\Gamma f) = f$. 为此任取 $x \in X$, 则有

$$\eta^*(\Gamma f)(x) = \Gamma(f)(\eta(x)) = f(x).$$

据命题 2.44 知 Γ 是等距同构, 将 $\mathfrak{A}$ 映满 $C(M_{\mathfrak{A}})$. 因此 η^* 将 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 映满 $\mathfrak{A}$. ■

我们将陈述并证明广义 Stone-Weierstrass 定理, 为此先引入一个述语. 对于集合 X 和其上一族函数 $\mathfrak{A}$, 在 X 上定义一个等价关系使两点 x_1 和 x_2 等价是指 $\mathfrak{A}$ 中诸函数 f 满足 $f(x_1) = f(x_2)$. 这个关系将 X 划分成一些子集使在诸子集上 $\mathfrak{A}$ 中函数为常数. 用 $\Pi_{\mathfrak{A}}$ 记这个划分. ■

2.47 定理 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 的包含常值函数的一个自共轭闭子代数, 则 $\mathfrak{A}$ 恰是那些在 $\Pi_{\mathfrak{A}}$ 中集合上为常数的连续函数全体.

证明 结合引理 2.45 和命题 2.46 可得. ■

若 $\mathfrak{A}$ 分离 X 的点, 则 $\Pi_{\mathfrak{A}}$ 由单点集组成, 由以上便得通常的 Stone-Weierstrass 定理.

2.48 正如上文所见, $C(X)$ 的自共轭闭子代数都等距同构于某个 $C(Y)$, 这里 Y 是紧 Hausdorff 空间. 然而, 这对于非自共轭闭子代数情形远非如此. 设 $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 中一个包含常数的闭子代数, 用 $\mathfrak{B}$ 记 $C(X)$ 中包含 $\mathfrak{A}$ 的最小自共轭闭子代数而 Y 是其极大理想空间, 则 $\mathfrak{B}$ 等距同构于 $C(Y)$, 而 Gelfand 变换 Γ 实现了它们之间的同构. 故 $\Gamma\mathfrak{A}$ 是 $C(Y)$ 中包含常值函数的闭子代数, 而更重要的是它分离 Y 的点. 可见, 与其将 $\mathfrak{A}$ 作为 $C(X)$ 的子代数来研究, 不如将 $\Gamma\mathfrak{A}$ 作为 $C(Y)$ 的子代数来研究. 因此, 我们引入以下概念.

2.49 定义 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 称 $C(X)$ 的闭子代数 $\mathfrak{A}$ 为一个函数代数是指它分离点且包含常值函数.

函数代数综合运用逼近论、复函数论及泛函分析的方法, 其理论有非常广泛的影响. 本书中我们仅限于考虑少数几例重要的函数代数.

2.50 例 以 $\mathbb{T}$ 记圆周群$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 对于整数 n, 规定 $\mathbb{T}$ 上函数 $\chi_n : z \mapsto z^n$, 则 $\chi_0 = 1$ 且 $\chi_{-n} = \overline{\chi_n}$, 对于所有整数 m 和 n 有等式 $\chi_n\chi_m = \chi_{n+m}$. 命

$$\mathscr{P} = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \chi_n : N \geqslant 0, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\},$$

其中函数称为三角多项式. 由于 $\mathscr{P}$ 是 $C(\mathbb{T})$ 的包含常值函数且分离点的自共轭子代数, 由 Stone-Weierstrass 定理知 $\mathscr{P}$ 有一致闭包 $C(\mathbb{T})$. 命

$$\mathscr{P}_+ = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \chi_n : N \geqslant 0, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\},$$

其中函数称为解析三角多项式, 其一致闭包 A 是一个函数代数并称为圆盘代数. 有个不明显的事实: $A \neq C(\mathbb{T})$, 这在说明了圆盘代数 A 的极大理想空间不同胚于 $\mathbb{T}$ 后自明. 为此我们需要以下引理.

2.51 引理 命 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, 则 $\mathscr{P}_+$ 中诸函数 $\sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n \chi_n$ 和 $\mathbb{D}$ 中诸点 w 满足等式

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n w^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \chi_n \right) (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \frac{1}{1 - w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t.$$

证明 函数 $1/(1-w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$ 关于 $t \in [0, 2\pi]$ 有一致收敛的幂级数展式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^n$, 因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \chi_n \right) (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \frac{1}{1 - w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sum_{m=0}^{\infty} w^m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n w^n, \end{aligned}$$

以上用到事实: 积分 $\dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t$ 在 $k = 0$ 时为 1, 而在整数 $k \neq 0$ 时为 0. ■

对于 $w \in \mathbb{D}$ 时, 规定 $\mathscr{P}_+$ 上泛函 $\varphi_w : \sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n \chi_n \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n w^n$. 显然 φ_w 是 $\mathscr{P}_+$ 上一个可乘线性泛函. 然而, 由于 $\mathscr{P}_+$ 不是 Banach 代数, 即 $\mathscr{P}_+$ 不完备, 我们不能直接得出 φ_w 的连续性. 然而据以上引理, 连续性源自以下式子

$$\begin{aligned}\left|\varphi_w\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^N \alpha_n w^n\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\frac{1}{1-w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right\|\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}|}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此 φ_w 在 $\mathscr{P}_+$ 上有界, 故它能够扩张成圆盘代数 A 上一个可乘线性泛函. 对于 $\mathbb{T}$ 中诸点 w, 以 φ_w 记圆盘代数 A 上赋值泛函 $f\mapsto f(w)$, 其合理性源自包含式 $A\subset C(\mathbb{T})$. 注意到 $\overline{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$, 从 $\overline{\mathbb{D}}$ 到圆盘代数 A 的极大理想空间 M 有个映射 $\psi: z\mapsto\varphi(z)$.

2.52 定理　映射 ψ 是 $\overline{\mathbb{D}}$ 到圆盘代数 A 的极大理想空间 M 上的一个同胚.

证明　由定理前面的说明, ψ 是合理定义的. 若 z_1 和 z_2 属于 $\overline{\mathbb{D}}$ 使 $\psi(z_1)=\psi(z_2)$, 则

$$z_1=\varphi_{z_1}(\chi_1)=\varphi_{z_2}(\chi_1)=z_2.$$

因此 ψ 是一对一的. 任取 $\varphi\in M$, 命 $z=\varphi(\chi_1)$. 由 $\|\chi_1\|=1$ 知 $|z|\leqslant 1$. 又恒等式

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right) &= \sum_{n=0}^N \alpha_n(\varphi(\chi_1))^n \\ &= \sum_{n=0}^N \alpha_n z^n = \varphi_z\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right)\end{aligned}$$

表明 φ 与 φ_z 在 A 的稠密集 P_+ 上相同, 因此 $\varphi=\varphi_z$. 可见, ψ 是到上的.

由于 $\overline{\mathbb{D}}$ 和 M 都是紧 Hausdorff 空间, ψ 是一对一的和到上的, 还需说明 ψ 是连续的. 为此假设 $\overline{\mathbb{D}}$ 中网 $\{z_\beta\}_{\beta\in B}$ 收敛至 z, 显然 $\sup\limits_{\beta\in B}\|\varphi_{z_\beta}\|=1$. 对于 $\mathscr{P}_+$ 中函数 $\sum\limits_{n=0}^N a_n\chi_n$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\in B}\varphi_{z_\beta}\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right) &= \lim_{\beta\in B}\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n z_\beta^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^N \alpha_n z^n = \varphi_z\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n\chi_n\right).\end{aligned}$$

因 $\mathscr{P}_+$ 是 A 的稠密集, 由命题 1.21 知 ψ 连续. ■

2.53　从命题 2.3 我们知道了 $C(\mathbb{T})$ 的极大理想空间恰好是 $\mathbb{T}$, 刚才我们又证明了 $C(\mathbb{T})$ 的闭子代数 A 有极大理想空间 $\overline{\mathbb{D}}$. 注意到对于 $z\in\mathbb{T}$, 圆盘代数 A 上

可乘线性泛函 φ_z 恰是 $C(\mathbb{T})$ 上在点 z 的赋值泛函在圆盘代数 A 上的限制. 于是可将 $C(\mathbb{T})$ 的极大理想空间嵌至 A 的极大理想空间. 这个例子至少粗略地说明了一个函数代数的极大理想空间如何成为代数中函数的自然定义域. 在这种情况下, 虽然 A 中元素都是 $\mathbb{T}$ 上函数, 但是圆周内部有些 "隐藏的点应当" 在定义域中. 特别地, 将 χ_1 视为 $\mathbb{T}$ 上函数时, 没有理由质疑它是可逆的; 然而, 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上它不可逆的理由则很显然 —— 它在原点为零.

让我们从另外一个观点考虑这个例子. 元素 χ_1 同时属于代数 A 和 $C(\mathbb{T})$. 在后一代数中我们有 $\sigma_{C(\mathbb{T})}(\chi_1) = \mathbb{T}$, 而在前一代数中我们有 $\sigma_A(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}}$. 因此 χ_1 的 "A- 谱" 不仅较大, 而且它是从 "$C(\mathbb{T})$- 谱" 通过 "填洞" 方式获得. 这在一般情况下的正确性则是以下定理的推论.

2.54 定理 (Šilov) 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, $\mathfrak{A}$ 是其一个闭子代数, 两者有相同单位元. 对于 $\mathfrak{A}$ 中诸元 f, 谱 $\sigma_{\mathfrak{A}}(f)$ 的边界落于谱 $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$ 的边界.

证明 若 $f-\lambda$ 于 $\mathfrak{A}$ 存在逆元, 则它于 $\mathfrak{B}$ 存在逆元. 于是 $\sigma_{\mathfrak{A}}(f)$ 包含 $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$, 只需要说明 $\sigma_{\mathfrak{A}}(f)$ 的边界点 λ_0 都属于 $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$. 为此取 $\rho_{\mathfrak{A}}(f)$ 中点列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. 若存在整数 n 使 $\|(f-\lambda_n)^{-1}\| < 1/|\lambda_0 - \lambda_n|$, 则

$$\|(f-\lambda_0) - (f-\lambda_n)\| < \frac{1}{\|(f-\lambda_n)^{-1}\|},$$

由命题 2.7 的证明知 $f-\lambda_0$ 于 $\mathfrak{A}$ 可逆, 矛盾. 于是, $\lim\limits_{n\to\infty} \|(f-\lambda_n)^{-1}\| = \infty$. 如果 λ_0 不属于 $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$, 则由推论 2.8, 在 λ_0 的某个邻域内 $\|(f-\lambda)^{-1}\|$ 有界, 矛盾. ■

2.55 推论 设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, $\mathfrak{A}$ 是其一个闭子代数, 两者有相同单位元. 对于 $\mathfrak{A}$ 中诸元 f, 谱 $\sigma_{\mathfrak{A}}(f)$ 是由 $\rho_{\mathfrak{B}}(f)$ 的某些有界连通分支与 $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$ 合并而得.

证明 由初等拓扑和上述定理可得. ■

2.56 例 下面我们考虑一例不等距的 Gelfand 变换.

在 1.15 节, 我们证明了 $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 是 Banach 空间. 类似地, 我们以 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 记 $\mathbb{Z}$ 上使 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ 的复函数 f 全体, 它依点态加法和数乘及如下范数:

$$\|f\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|$$

成为一个 Banach 空间. 另外, $\ell^1(\mathbb{Z})$ 也可以通过某种非显然方式成为一个 Banach 代数, 这个非显然方式就是其中函数 f 和 g 的卷积

$$f \circ g : n \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k) g(k).$$

我们需要说明诸整数 n 使上述级数都收敛且所得函数属于 $\ell^1(\mathbb{Z})$, 但知

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(n-k)||g(k)| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|g(k)|\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n-k)| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|g(k)|\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)| = \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

可见, 定义 $(f\circ g)(n)$ 的级数绝对收敛且

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|(f\circ g)(n)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(n-k)||g(k)| \leqslant \|f\|_1\|g\|_1.$$

这样 $f\circ g$ 属于 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 且 $\|f\circ g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. 作为练习, 请读者说明这个卷积满足结合律和交换律. 在此基础上, $\ell^1(\mathbb{Z})$ 是个交换 Banach 代数.

对于 $n\in\mathbb{Z}$, 规定 $\mathbb{Z}$ 上函数 e_n 在 n 处取值 1 而在其他地方取值 0, 则 e_0 为 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的单位元. 对于任意整数 n 和 m, 有 $e_n\circ e_m = e_{n+m}$.

设 M 是 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的极大理想空间. 对于 $\mathbb{T}$ 中诸点 z, 规定代数 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上一个函数 $\varphi_z : f\mapsto \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^n$, 易证 φ_z 是合理定义的且属于 M. 这样我们就能够定义 $\mathbb{T}$ 到 M 的一个映射 $\psi : z\mapsto\varphi_z$.

2.57 定理 映射 ψ 是从 $\mathbb{T}$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的极大理想空间 M 上的一个同胚.

证明 先证 ψ 是一对一的. 为此设 $\varphi_{z_1}=\varphi_{z_2}$, 则

$$z_1=\varphi_{z_1}(e_1)=\varphi_{z_2}(e_1)=z_2.$$

再证 ψ 是到上的. 为此任取 $\varphi\in M$, 命 $z=\varphi(e_1)$. 因 e_1 有个逆元 e_{-1}, 故 z 非零且

$$\begin{aligned}1=\|e_1\|_1 \geqslant |\varphi(e_1)| = |z| &= \frac{1}{|z^{-1}|} \\ &= \frac{1}{|\varphi(e_{-1})|} \geqslant \frac{1}{\|e_{-1}\|} = 1,\end{aligned}$$

而 z 便属于 $\mathbb{T}$. 进而, $\varphi=\psi(z)$. 这是因为诸整数 n 使

$$\varphi(e_n)=[\varphi(e_1)]^n=z^n=\varphi_z(e_n).$$

最后, 由于 M 和 $\mathbb{T}$ 都是紧 Hausdorff 空间, 只需说明 ψ 是连续映射. 可设 $\mathbb{T}$ 中一个网 $\{z_\beta\}_{\beta\in B}$ 收敛至 z, 则对于 $f\in\ell^1(\mathbb{Z})$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{z_\beta}(f)-\varphi_z(f)\right| &\leqslant \sum_{|n|\leqslant N}|f(n)|\left|z_\beta^n-z^n\right| + \sum_{|n|>N}|f(n)|\left|z_\beta^n-z^n\right| \\ &\leqslant \|f\|_1 \sup_{|n|\leqslant N}\left|z_\beta^n-z^n\right| + 2\sum_{|n|>N}|f(n)|.\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 选个 N 使 $\sum\limits_{|n|>N} |f(n)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$; 选择 β_0 使得当 $\beta \geqslant \beta_0$ 时,

$$\sup_{|n|\leqslant N} \left|z_\beta^n - z^n\right| < \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_1 + 1)}.$$

于是 $\beta \geqslant \beta_0$ 时, $\left|\varphi_{z_\beta}(f) - \varphi_z(f)\right| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{\beta \in B} \varphi_{z_\beta}(f) = \varphi_z(f)$ 而 ψ 便连续. ■

2.58 以上定理用同胚 ψ 将 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的极大理想空间与单位圆周 $\mathbb{T}$ 等同了起来. 这样, 代数 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的 Gelfand 变换 Γ 就是从 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 到 $C(\mathbb{T})$ 的算子使

$$(\Gamma f)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^n, \quad f \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad z \in \mathbb{T},$$

其中级数在 $\mathbb{T}$ 上绝对一致收敛至 Γf. 由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Gamma f)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)t}\mathrm{d}t = f(n),\end{aligned}$$

这里积分与求和交换是因为级数一致收敛, 所以

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Gamma f)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

可见, f 的值与 Γf 的 Fourier 系数一致, 即 f 的值能够从 Γf 重新得到. 特别地, $C(\mathbb{T})$ 中 φ 属于 Γ 的值域当且仅当 φ 的 Fourier 系数组成个绝对收敛的级数, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right| < \infty.$$

不是每个 $\varphi \in C(\mathbb{T})$ 都有绝对收敛的 Fourier 级数, 这个结论的证明留作练习. 因此在 φ 无零点但有绝对收敛的 Fourier 级数情形, $1/\varphi$ 是否也有绝对收敛的 Fourier 级数就不是个平凡问题了. 这个问题的肯定答案是 Wiener 的一个非平凡定理, 其以下证明源自 Gelfand, 这显示了他建立的交换 Banach 代数理论的力量.

2.59 定理 如果 $C(\mathbb{T})$ 中 φ 有绝对收敛的 Fourier 级数且诸 $z \in \mathbb{T}$ 使 $\varphi(z) \neq 0$, 则 $1/\varphi$ 也有绝对收敛的 Fourier 级数.

证明 由假设知存在 $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ 使 $\Gamma f = \varphi$. 因 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的极大理想空间 $\mathbb{T}$ 中诸点 z 使 $\varphi(z) \neq 0$, 由定理 2.35 知 f 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 中存在逆元. 命 $g = f^{-1}$, 则

$$1 = \Gamma e_0 = \Gamma(g \circ f) = (\Gamma g) \cdot \varphi,$$

即 $1/\varphi = \Gamma g$. 因此 $1/\varphi$ 有绝对收敛的 Fourier 级数. ■

2.60 例　在结束本章之前, 我们考察一例交换 Banach 代数, 其 Gelfand 变换的性质是尽可能地好, 它是到极大理想空间上连续函数空间上的等距同构.

在 1.45 节, 我们证明了 L^∞ 是 Banach 空间. 对于 $\mathscr{L}^\infty$ 中元素 f 和 g, 点态乘积 fg 属于 $\mathscr{L}^\infty$ 且 $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. 因 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{L}^\infty$ 的一个理想, 故商代数 L^∞ 是 Banach 代数, 其乘法交换. 这里有个不太明显的事实: 存在紧 Hausdorff 空间 Y 使 L^∞ 等距同构于 $C(Y)$. 这个事实将在我们确立了 L^∞ 中诸元的谱之后得证, 为此我们需要关于可测函数值域的以下概念.

2.61 定义　设 f 是测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 上一个可测函数, 则 f 的本质值域$\mathscr{R}(f)$ 是 $\mathbb{C}$ 的子集, 其元素 λ 有此特征: 对于 $\varepsilon > 0$, 可测集 $\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ 有正测度.

2.62 引理　诸 $f \in \mathscr{L}^\infty$ 的本质值域 $\mathscr{R}(f)$ 是 $\mathbb{C}$ 的紧集且

$$\|f\|_\infty = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathscr{R}(f)\}.$$

证明　如果 λ_0 不属于 $\mathscr{R}(f)$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\{x \in X : |f(x) - \lambda_0| < \varepsilon\}$ 有零测度. 显然以 λ_0 为圆心以 ε 为半径的开圆内诸点都不属于 $\mathscr{R}(f)$, 因此 $\mathscr{R}(f)$ 的补集是开集, 而 $\mathscr{R}(f)$ 便是闭集. 如果 $\mathbb{C}$ 中某个 λ_0 和某个 $\delta > 0$ 使几乎所有 $x \in X$ 满足不等式 $|\lambda_0| \geqslant |f(x)| + \delta$, 则集合 $\{x \in X : |f(x) - \lambda_0| < \delta\}$ 有零测度. 因此

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathscr{R}(f)\} \leqslant \|f\|_\infty.$$

可见, $\mathscr{R}(f)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 的紧集.

现在假设 f 属于 $\mathscr{L}^\infty$ 且 $\mathscr{R}(f)$ 中无 λ 使 $|\lambda| = \|f\|_\infty$. 但以满足左式的 λ 为中心都有某个 δ_λ 为半径的开圆盘 D_λ 使集合 $\{x \in X : |f(x) - \lambda_0| < \delta_\lambda\}$ 有零测度. 注意到圆周 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| = \|f\|_\infty\}$ 是紧集, 它便被某些开圆盘 $D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \cdots, D_{\lambda_n}$ 覆盖使诸集合 $\{x \in X : f(x) \in D_{\lambda_i}\}$ 有零测度. 故集合 $\{x \in X : f(x) \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_{\lambda_i}\}$ 有零测度, 于是存在 $\varepsilon > 0$ 使集合 $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ 有零测度. 此矛盾结束了证明. ■

2.63 引理　诸 $f \in \mathscr{L}^\infty$ 使 $\sigma(f) = \mathscr{R}(f)$.

证明　如果 λ 不属于 $\sigma(f)$, 则 $\dfrac{1}{f-\lambda}$ 是本质有界的, 这表明以下集合

$$\left\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \frac{1}{2\|(f-\lambda)^{-1}\|_\infty}\right\}$$

有零测度. 反之, 如果存在 $\delta > 0$ 使集合 $\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \delta\}$ 有零测度, 则函数 $\dfrac{1}{|f-\lambda|}$ 有本质上界 $\dfrac{1}{\delta}$, 而 λ 便不属于 $\sigma(f)$. 可见, $\sigma(f) = \mathscr{R}(f)$. ■

2.64 定理　如果 M 是 L^∞ 的极大理想空间, 则 Gelfand 变换 Γ 是 L^∞ 到 $C(M)$ 上的一个等距同构, 并且诸 $f \in L^\infty$ 满足等式 $\overline{\Gamma f} = \Gamma \overline{f}$.

证明　对于 $f \in L^\infty$, 将上述引理和推论 2.36 结合起来知 Γf 有值域 $\mathscr{R}(f)$, 因此

$$\begin{aligned}\|\Gamma f\|_\infty &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{ran}\Gamma f\}\\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathscr{R}(f)\} = \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

可见, Γ 是等距的. 再证明 Γ 保持共轭运算. 设 f_1 和 f_2 是实值的使 $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$. 实函数的本质值域是实的且有 $\operatorname{ran}\Gamma f_1 = \mathscr{R}(f_1)$ 及 $\operatorname{ran}\Gamma f_2 = \mathscr{R}(f_2)$, 故我们有

$$\overline{\Gamma f} = \overline{\Gamma f_1} + \overline{\mathrm{i}\Gamma f_2} = \Gamma f_1 - \mathrm{i}\Gamma f_2 = \Gamma \overline{f}.$$

可见, $\Gamma(L^\infty)$ 是 $C(M)$ 的自共轭闭子代数, 它明显分离 M 中诸点且包含 M 上常值函数. 由 Stone-Weierstrass 定理知 $\Gamma(L^\infty) = C(M)$. ■

在前面几个例中我们计算了极大理想空间, 这个例中的极大理想空间是高度病态空间, 它有 $2^{2^{\aleph_0}}$ 个点. 我们后面会用到这个空间的某些性质.

2.65　容易证明 1.15 中的 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 关于点态乘积也是 Banach 代数. 从本章一个习题中可知这个代数的 Gelfand 变换也是一个等距同构. 将 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 的极大理想空间记为 $\beta\mathbb{Z}^+$, 这称为 $\mathbb{Z}^+$ 的 Stone-Čech 紧化.

注　记

交换 Banach 代数的基本理论是由 Gelfand[41] 建立起来的, 言及此事时还应提及 Wiener 关于广义调和分析理论提供的原型. 这个领域中更进一步的结果见于 Gelfand、 Raikov 和 Šilov[42], Naimark[80] 以及 Rickart[89]. 确立 $C(X)$ 的自共轭子代数包括推广 Weierstrass 逼近定理是由 Stone[105] 完成的. 有关函数代数的文献是相当浩瀚的, 而优秀的原始文献是 Browder[10] 和 Gamelin[40] 这两本书.

习　题

习题 2.1　设 $\mathfrak{D} = \{f \in C[0,1] : f' \in C[0,1]\}$ 并定义 $\|f\|_d = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, 证明 $\mathfrak{D}$ 依此范数 $\|f\|_d$ 是 Banach 代数, 但其 Gelfand 变换既不等距也不到上.

习题 2.2　设 X 是紧 Hausdorff 空间, K 是其一个闭子集. 命

$$\mathfrak{I} = \{f \in C(X) : f(x) = 0, x \in K\},$$

证明 $\mathfrak{I}$ 是 $C(X)$ 的一个闭理想. 再证明 $C(X)$ 的每个闭理想都是这种形式. 特别地, $C(X)$ 的每个闭理想都是包含它的所有极大理想之交.

习题 2.3　证明习题 2.1 中 $\mathfrak{D}$ 的每个闭理想都不是包含它的极大理想之交.

习题 2.4 证明 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上有界线性算子全体 $\mathfrak{L}(\mathscr{X})$ 是 Banach 代数.

习题 2.5 如果 $\mathscr{X}$ 是维数大于 1 的有限维 Banach 空间, 证明 $\mathfrak{L}(\mathscr{X})$ 上可乘线性泛函只能是零泛函.

定义 称 $\mathscr{X}$ 上一个算子 T 为有限秩的是指 T 的值域是有限维的.

习题 2.6 如果 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{X})$ 中有限秩算子全体是双边理想, 而且这个理想包含在 $\mathfrak{L}(\mathscr{X})$ 的每个真双边理想中.

习题 2.7 如果 f 是 $[0,1]$ 上一个连续函数, 证明 f 的值域就是在 Lebesgue 测度下 f 的本质值域.

习题 2.8 设 $[0,1]$ 上有界实值函数 f 只在 $1/2$ 处不连续, $\mathfrak{A}$ 是由 f 和 $C[0,1]$ 生成的一致闭代数, 确定 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间.

习题 2.9 如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 是其中幂等函数全体的线性闭包当且仅当 X 是完全不连通的.

习题 2.10 证明 L^∞ 的极大理想空间是完全不连通的.

习题 2.11 设 X 是完全正则 Hausdorff 空间, $B(X)$ 是其上有界连续函数空间. 证明 $B(X)$ 在上确界范数下是交换 Banach 代数. 以 βX 记 $B(X)$ 的极大理想空间, 则 $B(X)$ 的 Gelfand 变换是到 $C(\beta X)$ 上的等距同构且保持共轭运算. 进而从 X 到 βX 存在自然嵌入 β. 空间 βX 称为 X 的 Stone-Čech 紧化.

习题 2.12 设 X 是完全正则 Hausdorff 空间, Y 是紧 Hausdorff 空间, φ 是从 X 到 Y 的一对一连续映射且有稠密值域. 证明从 βX 到 Y 上存在连续映射 ψ 使得 $\varphi = \psi \circ \beta$ (提示: 考虑限制 $C(Y)$ 中函数使之形成 $C(\beta X)$ 的子代数.)

习题 2.13 设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 命

$$\mathfrak{R} = \{f \in \mathfrak{B} : 1 + \lambda f \text{ 可逆}, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

证明 $\mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个闭理想.

定义 设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 命

$$\mathfrak{R} = \{f \in \mathfrak{B} : 1 + \lambda f \text{ 可逆}, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

这称为 $\mathfrak{B}$ 的根理想. 如果 $\mathfrak{R} = \{0\}$, 则称 $\mathfrak{B}$ 为半单的.

习题 2.14 如果 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则 $\mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的所有极大理想的交集.

习题 2.15 设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则 $\mathfrak{B}$ 是半单的当且仅当其 Gelfand 变换是一对一的.

习题 2.16 如果 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, 则 $\mathfrak{B}/\mathfrak{R}$ 是半单的.

习题 2.17 证明 $L^1[0,1] \oplus \mathbb{C}$ 在 1- 范数 (见练习 1.17) 下依如下乘法运算

$$[(f \oplus \lambda)(g \oplus \mu)](t) = \{\mu f(t) + \lambda g(t) + \int_0^t f(t-x)g(x)\mathrm{d}x\} \oplus \lambda\mu$$

是交换 Banach 代数, 再证明 $L^1[0,1]\oplus\mathbb{C}$ 不是半单的.

习题 2.18(Riesz 函数演算)　设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 代数, x 是 $\mathfrak{B}$ 中一个元素, Ω 是 $\mathbb{C}$ 中包含谱 $\sigma(x)$ 的一个开集, Λ 是 Ω 中某个含 $\sigma(x)$ 的开集的边界且由 Ω 中有限条可求长简单闭曲线组成. 以 $A(\Omega)$ 记 Ω 上复全纯函数组成的代数, 证明映射

$$\varphi\mapsto\varphi(x)=\int_\Lambda\varphi(z)(x-z)^{-1}\mathrm{d}z$$

定义了从 $A(\Omega)$ 到 $\mathfrak{B}$ 的一个同态使得诸 $\varphi\in A(\Omega)$ 满足等式 $\sigma(\varphi(x))=\varphi(\sigma(x))$.

习题 2.19　设 $\mathfrak{B}$ 是交换 Banach 代数, x 是其中一个元素且其谱 $\sigma(x)$ 落于某个开集 Ω. 当 $A(\Omega)$ 中存在非零 φ 使 $\varphi(x)=0$ 时, $\sigma(x)$ 是有限集且存在多项式 $p(z)$ 使 $p(x)=0$.

习题 2.20　证明无常数 M 使 $\mathbb{T}$ 上三角多项式 $p=\sum\limits_{n=-N}^{N}a_n\chi_n$ 都满足不等式

$$\sum_{n=-N}^{N}|a_n|\leqslant M\|p\|_\infty.$$

习题 2.21　证明 $\mathbb{T}$ 上连续函数都有绝对收敛的 Fourier 级数的假设蕴涵 Banach 代数 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 的 Gelfand 变换可逆. 因此由上面习题可知存在 Fourier 级数不绝对收敛的连续函数.

定义　一个 Banach 代数 $\mathfrak{B}$ 到自身上的连续同构称为 $\mathfrak{B}$ 上自同构, 其全体记为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$.

习题 2.22　如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 上自同构都连续.

习题 2.23　如果 X 是紧 Hausdorff 空间, φ 是其上一个同胚, 则 $C(X)$ 上存在自同构 Φ 使 $(\Phi f)(x)=f(\varphi x)$. 证明映射 $\varphi\mapsto\Phi$ 是 X 上同胚群 $\mathrm{Hom}(X)$ 到 $\mathrm{Aut}C(X)$ 的一个同构.

习题 2.24　如果 $\mathfrak{A}$ 是函数代数, M 是其极大理想空间, 则从 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 到 M 上同胚群 $\mathrm{Hom}(M)$ 存在自然单同态.

习题 2.25　以 A 记圆盘代数, 闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 是其极大理想空间, 则在上题所得自然同态下, $\mathrm{Aut}(A)$ 在 $\mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{D}})$ 的像是 $\mathbb{D}$ 上分式线性变换 $z\mapsto\dfrac{\beta(z-\alpha)}{1-\overline{\alpha}z}$ 组成的群, 其中复数 α 和 β 满足 $|\alpha|<1$ 和 $|\beta|=1$.

定义　设 $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 中一个函数代数, 则 X 的一个闭子集 M 称为 $\mathfrak{A}$ 的一个边界是指诸 $f\in\mathfrak{A}$ 满足等式 $\|f\|_\infty=\sup\{|f(m)|:m\in M\}$.

习题 2.26　设 M 是 $C(X)$ 中某个函数代数 $\mathfrak{A}$ 的一个边界. 对于 $\mathfrak{A}$ 中 $f_1,\cdots,f_n$, 作开集

$$U=\{x\in X:|f_i(x)|<1,i=1,2,\cdots,n\},$$

则要么 $M\backslash U$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个边界, 要么 U 与 $\mathfrak{A}$ 的诸边界相交.

习题 2.27 (Šilov) 设 $\mathfrak{A}$ 是函数代数, 则其所有边界之交还是边界 (这称为 $\mathfrak{A}$ 的 Šilov 边界).

习题 2.28 对于圆盘代数 A 中函数 f, 给出极大模原理的泛函分析证明. (提示: 说明

$$\widehat{f}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_r(\theta - t)f(e^{i\theta})dt,$$

这里函数 $k_r(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^n e^{int}$ 是正的.)

习题 2.29 证明圆盘代数 A 的 Šilov 边界是单位圆周.

习题 2.30 证明交换 Banach 代数的抽象指标群不含有限阶元.

习题 2.31 若 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 都是 Banach 代数, 则 $\mathfrak{B}_1\widehat{\otimes}\mathfrak{B}_2$ 和 $\mathfrak{B}_1\overline{\otimes}\mathfrak{B}_2$ 也都是 Banach 代数. 当 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 还交换且分别有极大理想空间 M_1 和 M_2 时, $M_1 \times M_2$ 同为 $\mathfrak{B}_1\widehat{\otimes}\mathfrak{B}_2$ 和 $\mathfrak{B}_1\overline{\otimes}\mathfrak{B}_2$ 的极大理想空间. (对于 $\widehat{\otimes}$ 和 $\overline{\otimes}$ 的定义, 看练习 1.36 和 1.37.)

习题 2.32 如果复数域 $\mathbb{C}$ 上代数 $\mathfrak{B}$ 有范数使其成为 Banach 空间且其中任意一对元素 f 和 g 都满足不等式 $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$, 则 $B \oplus \mathbb{C}$ 在 1- 范数 (见练习 1.17) 下依乘法

$$(f \oplus \lambda)(g \oplus \mu) = (fg + \lambda g + \mu f) \oplus \lambda\mu$$

及单位元 $0 \oplus 1$ 成为一个 Banach 代数.

习题 2.33 如果 φ 是 $\mathfrak{B}$ 上一个可乘线性泛函, 则 φ 可唯一扩张成 $M_{\mathfrak{B}\oplus\mathbb{C}}$ 的元素, 并且 $\mathfrak{B}$ 上全部非零可乘线性泛函全体是局部紧 Hausdorff 空间.

习题 2.34 证明 $L^1(\mathbb{R})$ 是无单位元的交换 Banach 代数, 其中乘法定义如下:

$$(f \circ g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

习题 2.35 证明诸 $t \in \mathbb{R}$ 都确立 $L^1(\mathbb{R})$ 上一个可乘线性泛函如下:

$$\varphi_t : f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}dx.$$

反之, $L^1(\mathbb{R})$ 上诸非零可乘线性泛函都是如上这个形式. (提示: $L^1(\mathbb{R})$ 上诸有界线性泛函都由某个 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ 给出. 对于 $L^1(\mathbb{R})$ 中 f 和 g, 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\{\varphi(x-t)\varphi(t) - \varphi(x)\}dtdx = 0,$$

这就推出等式 $\varphi(x-t)\varphi(t)=\varphi(x)$ 在 (s,t) 不属于某个 Lebesgue 测度为 0 的平面集合时成立.)

习题 2.36　证明 $L^1(\mathbb{R})$ 的极大理想空间同胚于 $\mathbb{R}$ 并且 Gelfand 变换与 Fourier 变换一致.

第 3 章　Hilbert 空间的几何

3.1　Banach 空间概念提炼了有限维线性空间的许多重要性质. 然而, 一个 Banach 空间的几何与 n 维 Euclid 空间的几何可能有相当大区别. 例如, Banach 空间的单位球可能有角, 闭凸集也不一定具有范数最小的唯一元素. 多数 Banach 空间缺乏的最重要几何性质是垂直性或正交性概念.

在解析几何中, 我们知道两个向量的正交性可由它们的内积 (或点积) 来确定. 本章我们将引入抽象内积概念, 并说明一个线性空间在赋予一个内积后如何成为一个赋范线性空间. 如果这个线性空间在由该范数导出的度量下是完备的, 则它为 Hilbert 空间. 这一章将主要讨论 Hilbert 空间的基础几何, 并且证明这样的空间具有 n 维 Euclid 空间的很多好性质. 事实上, 我们也将证明有限维 Hilbert 空间等距同构于某个 n 维 Euclid 空间.

3.2 定义　函数 $\varphi:\mathscr{L}\times\mathscr{L}\to\mathbb{C}$ 为复线性空间 $\mathscr{L}$ 上一个内积指它满足以下条件:

(1) 对于 $\mathscr{L}$ 中向量 f_1,f_2,g 和 $\mathbb{C}$ 中数 α_1,α_2, 有下式

$$\varphi(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,g)=\alpha_1\varphi(f_1,g)+\alpha_2\varphi(f_2,g);$$

(2) 对于 $\mathscr{L}$ 中向量 f,g_1,g_2 和 $\mathbb{C}$ 中数 β_1,β_2, 有下式

$$\varphi(f,\beta_1 g_1+\beta_2 g_2)=\overline{\beta_1}\varphi(f,g_1)+\overline{\beta_2}\varphi(f,g_2);$$

(3) 对于 $\mathscr{L}$ 中向量 f,g, 有等式 $\varphi(f,g)=\overline{\varphi(g,f)}$;

(4) $\varphi(f,f)\geqslant 0$, 而 $\varphi(f,f)=0$ 当且仅当 $f=0$.

一个赋予了内积的线性空间称为一个内积空间.

以下引理引进了一个有用的极化恒等式, 其重要性在于内积的值仅由相应二次型 $\psi:f\mapsto\varphi(f,f)$ 的值表示.

3.3 引理　设 $\mathscr{L}$ 是内积空间, 其内积为 φ, 则对于 $\mathscr{L}$ 中所有向量 f 和 g 有

$$\begin{aligned}\varphi(f,g)=&\frac{1}{4}\{\varphi(f+g,f+g)-\varphi(f-g,f-g)\\&+\mathrm{i}\varphi(f+\mathrm{i}g,f+\mathrm{i}g)-\mathrm{i}\varphi(f-\mathrm{i}g,f-\mathrm{i}g)\}.\end{aligned}$$

证明　直接计算可得. ■

通常将 $\mathscr{L}$ 中向量 f 和 g 的内积写成 $(\cdot,\cdot)$, 即 $(f,g)=\varphi(f,g)$

3.4 定义　内积空间 $\mathscr{L}$ 中诸向量 f 相应于内积的范数规定为 $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$.

在内积空间的研究中, 下述不等式是非常基本的. 在证明这个不等式之后, 我们将证明上述定义中的范数确实具有范数的特征性质.

3.5 命题 (Cauchy-Schwarz 不等式)　内积空间 $\mathscr{L}$ 中所有向量 f 和 g 满足下式

$$|(f,g)| \leqslant \|f\| \ \|g\|.$$

证明　对于 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有

$$\begin{aligned} &|\lambda|^2 \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda}(f,g)\right] + \|f\|^2 \\ &= (f+\lambda g, f+\lambda g) = \|f+\lambda g\|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

取 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 使 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f,g) \geqslant 0$. 对于实数 t, 命 $\lambda = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 我们得不等式

$$\|g\|^2 t^2 + 2|(f,g)|t + \|f\|^2 \geqslant 0.$$

因此, 未知数为 t 的二次方程

$$\|g\|^2 t^2 + 2|(f,g)|t + \|f\|^2 = 0$$

最多有一个实根, 从而其判别式一定非正, 即

$$[2|(f,g)|]^2 - 4\|g\|^2\|f\|^2 \leqslant 0.$$

于是 $|(f,g)| \leqslant \|f\| \ \|g\|$. ■

3.6　在上述命题的证明过程中, 我们并没有用到如此性质: 由 $(f,f)=0$ 可推出 $f=0$.

3.7 命题　设 $\mathscr{L}$ 是内积空间, 则 $\|\cdot\|$ 定义了 $\mathscr{L}$ 上一个范数.

证明　我们必须验证 $\|\cdot\|$ 满足定义 1.3 中 (1)—(3). 根据定义 3.2 中 (4) 得 $\|f\|=0$ 当且仅当 $f=0$. 从而 (1) 成立. 为证 (2) 也成立, 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $f \in \mathscr{L}$, 则

$$\|\lambda f\| = (\lambda f, \lambda f)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda\overline{\lambda}(f,f)\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \ \|f\|.$$

最后, 对于 $\mathscr{L}$ 中所有向量 f 和 g, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}(f,g) \leqslant \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f,g)| \\ &\leqslant \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \ \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

因此, (3) 也成立. 从而 $\|\cdot\|$ 是范数. ■

3.8 命题 内积空间上的内积是连续的.

证明 设 $\mathscr{L}$ 是内积空间, 其中网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{g_\beta\}_{\beta\in B}$ 各有极限 f 和 g. 取 $\alpha_0\in A$ 使得当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时, $\|f_\alpha-f\|<1$, 特别地, $\|f_\alpha\|<\|f\|+1$, 于是

$$\begin{aligned}|(f,g)-(f_\alpha,g_\beta)|&\leqslant|(f-f_\alpha,g)|+|(f_\alpha,g-g_\beta)|\\&\leqslant\|f-f_\alpha\|\,\|g\|+(\|f\|+1)\,\|g-g_\beta\|,\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{\alpha\in A}(f_\alpha,g_\alpha)=(f,g)$. ■

3.9 定义 内积空间 $\mathscr{L}$ 中两个向量 f 和 g 称为正交的并记为 $f\perp g$ 是指 $(f,g)=0$. 称 $\mathscr{L}$ 的子集 $\mathscr{S}$ 是正交集是指其中任意两个向量 f 和 g 都正交. 当 $\mathscr{S}$ 中向量 f 还都使 $\|f\|=1$ 时, 称 $\mathscr{S}$ 是规范正交集.

正交性这个概念推广了 Euclid 空间中相关概念, 现在有可能将 Euclid 几何中各种各样的定理推广到内积空间. 我们将给出两个非常有用的推广, 第一个是大家熟知的 Pythagoras 定理, 而第二个是平行四边形的边长与对角线的长度关系.

3.10 命题 (Pythagoras 定理) 设 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是内积空间 $\mathscr{L}$ 的一个正交子集, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|^2=\sum_{i=1}^n\|f_i\|^2.$$

证明 直接算得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|^2&=\left(\sum_{i=1}^n f_i,\sum_{i=1}^n f_i\right)\\&=\sum_{i=1}^n(f_i,f_i)+\sum_{i,j=1,i\neq j}^n(f_i,f_j)\\&=\sum_{i=1}^n(f_i,f_i)=\sum_{i=1}^n\|f_i\|^2.\end{aligned}$$

■

3.11 命题 (平行四边形法则) 设 f 和 g 是内积空间 $\mathscr{L}$ 中向量, 则

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2.$$

证明 将等式左端用内积表示并展开即得证. ■

像赋范线性空间一样, 只有当内积空间在由范数导出的度量下完备时, 一些最深刻的结果才成立.

3.12 定义 在范数诱导的度量下完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

特别地, Hilbert 空间都是 Banach 空间.

3.13 例　我们现在考虑几例 Hilbert 空间.

设 n 是正整数, 命 $\mathbb{C}^n=\{x:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\mathbb{C}\}$, 则 $\mathbb{C}^n$ 依坐标分量的线性运算是复线性空间. 定义 $\mathbb{C}^n$ 上内积 $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$. 易证 $(\cdot,\cdot)$ 满足内积的特征性质且相应范数就是通常 Euclid 范数 $\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 为证完备性, 假设 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 Cauchy 序列. 当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时, $\left|x_i^k-x_i^m\right|\leqslant\left\|x^k-x^m\right\|_2$, 故 $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 序列. 命 $x_i=\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k$ 及 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则 x 属于 $\mathbb{C}^n$ 且是 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ 的极限. 因此 $\mathbb{C}^n$ 是一个 Hilbert 空间.

空间 $\mathbb{C}^n$ 是 n 维实 Euclid 空间的复形式. 本章后面, 我们将证明在某种有待明确的意义下, 所有 $\mathbb{C}^n$ 代表了任意有限维 Hilbert 空间.

3.14　我们考虑所有 $\mathbb{C}^n$ 的 "并". 设 $\mathscr{L}$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上只在有限个点取非零值的复函数全体, 它依点态加法和数乘是复线性空间且其上有内积

$$(f,g)=\sum_{n=0}^\infty f(n)\overline{g(n)},$$

上述级数收敛的原因在于 f 和 g 只在有限个点取非零值. 在范数

$$\|f\|_2=\left(\sum_{n=0}^\infty|f(n)|^2\right)^{1/2}$$

导出的度量下, 空间 $\mathscr{L}$ 是否完备? 考虑 $\mathscr{L}$ 中序列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, 其中

$$f_k(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\leqslant k,\\ 0, & n>k.\end{cases}$$

易证 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是 Cauchy 序列, 但 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 并不收敛至 $\mathscr{L}$ 中某个元, 这留作习题. 因此 $\mathscr{L}$ 不是 Hilbert 空间.

3.15　空间 $\mathscr{L}$ 之所以不是 Hilbert 空间是因为它不够大. 我们将它扩大使其成为第一例无限维 Hilbert 空间 (这可与例 1.15 进行比较).

以 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 记 $\mathbb{Z}^+$ 上满足 $\sum\limits_{n=0}^\infty|f_n|^2<\infty$ 的复函数 f 全体. 因为

$$|(f+g)(n)|^2\leqslant 2\,|f(n)|^2+2\,|g(n)|^2,$$

所以 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 是复线性空间. 对于其中 f 和 g, 规定 $(f,g)=\sum\limits_{n=0}^\infty f(n)\overline{g(n)}$. 这是否有意义, 即这个级数是否收敛? 对于每个 $N\in\mathbb{Z}^+$, 规定 N- 元组

$$F_N=(|f(0)|,|f(1)|,\cdots,|f(N)|),$$
$$G_N=(|g(0)|,|g(1)|,\cdots,|g(N)|),$$

它们属于 $\mathbb{C}^N$. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left|f(n)\overline{g(n)}\right| &= |(F_N, G_N)| \leqslant \|F_N\|\,\|G_N\| \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N}|f(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{N}|g(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2 .\end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ 绝对收敛. 由此易知 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上一个内积, 它诱导的范数记为 $\|\cdot\|_2$. 下证 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 在范数 $\|\cdot\|_2$ 导出的度量下是完备的.

任取 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 中一个 Cauchy 序列 $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$, 诸 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使

$$\left|f^k(n) - f^j(n)\right| \leqslant \left\|f^k - f^j\right\|_2 ,$$

因此 $\{f^k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中一个 Cauchy 序列. 于是可定义 $\mathbb{Z}^+$ 上函数 $f : n \mapsto \lim\limits_{k\to\infty} f^k(n)$. 接下来要证明 f 属于 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|f - f^k\right\|_2 = 0$. 因为 $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 序列, 所以存在整数 K, 使得当 $k \geqslant K$ 时, $\left\|f^k - f^K\right\|_2 \leqslant 1$. 而 $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 源自下式

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{n=0}^{N}|f(n)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} &\leqslant \left\{\sum_{n=0}^{N}\left|f(n) - f^K(n)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{n=0}^{N}\left|f^K(n)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left|f^k(n) - f^K(n)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{n=0}^{N}\left|f^K(n)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \limsup_{k\to\infty}\left\|f^k - f^K\right\|_2 + \left\|f^K\right\|_2 \leqslant 1 + \left\|f^K\right\|_2 .\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 M 使得当 $k, j \geqslant M$ 时, $\left\|f^k - f^j\right\| < \varepsilon$. 从而对任意 N 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left|f(n) - f^k(n)\right|^2 &= \lim_{j\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left|f^j(n) - f^k(n)\right|^2 \\ &\leqslant \limsup_{j\to\infty}\left\|f^j - f^k\right\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2.\end{aligned}$$

由 N 的任意性, 可得 $\left\|f - f^k\right\|_2 \leqslant \varepsilon$. 于是, $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 是 Hilbert 空间.

3.16 空间 L^2 在 1.45 节, 我们基于概率空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 引入了 Banach 空间 L^1 和 L^∞. 我们现在考虑相应的 L^2 空间, 它是 Hilbert 空间.

首先以 $\mathscr{L}^2$ 记 X 上满足 $\int\limits_X |f|^2 \mathrm{d}\mu < \infty$ 的可测复函数 f 全体. 对 X 上任意复值函数 f 和 g, 都有下式

$$|f + g|^2 \leqslant 2|f|^2 + 2|g|^2.$$

因此 $\mathscr{L}^2$ 在点态加法与数乘下是线性空间. 以 L^2 记商空间 $\mathscr{L}^2/\mathscr{N}$.

任取 $\mathscr{L}^2$ 中函数 f 和 g, 则函数 $f\overline{g}$ 的可积性源自以下恒等式

$$|fg| = \frac{1}{2}\left\{(|f|+|g|)^2 - |f|^2 - |g|^2\right\}.$$

再定义 $\varphi(f,g) = \int\limits_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu$. 显然, 除了 $\varphi(f,f)=0$ 当且仅当 f 属于 $\mathscr{N}$, 它不必是零函数外, φ 满足内积的其余性质. 而 Cauchy-Schwarz 不等式的证明后的 3.6 节说明, Cauchy-Schwarz 不等式对于这样的 φ 也成立. 因此, 设 f 和 f' 及 g 和 g' 属于 $\mathscr{L}^2$ 使得 $f-f'$ 和 $g-g'$ 属于 $\mathscr{N}$, 则

$$\begin{aligned}|\varphi(f,g)-\varphi(f',g')| &\leqslant |\varphi(f-f',g)| + |\varphi(f',g-g')| \\ &\leqslant \sqrt{\varphi(f-f',f-f')\varphi(g,g)} \\ &\quad + \sqrt{\varphi(f',f')\varphi(g-g',g-g')} = 0.\end{aligned}$$

于是, L^2 上有合理定义的内积 $([f],[g]) \mapsto \varphi(f,g)$, 以后用通常方式记它. 于是 L^2 上相应范数为 $\|[f]\|_2 = \left(\int_X |f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}$. 下面证明 L^2 的完备性, 这比起 L^1 的情形更复杂.

先建立一个不等式: 诸 $f\in\mathscr{L}^2$ 满足 $\|[f]\|_1 \leqslant \|[f]\|_2$. 为此作 X 上函数 g 使得当 $f(x)\neq 0$ 时, $g(x) = f(x)/|f(x)|$; 当 $f(x)=0$ 时, $g(x)=1$. 显然 g 是可测函数, $|g(x)|=1$ 且 $f\overline{g}=|f|$. 因此利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\|[f]\|_1 &= \int_X |f|\mathrm{d}\mu = \int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu \\ &= |(f,g)| \leqslant \|[f]\|_2\,\|[g]\|_2 = \|[f]\|_2\,.\end{aligned}$$

接下来我们利用推论 1.10 说明 L^2 的完备性. 设 L^2 中序列 $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|[f_n]\|_2 \leqslant M < \infty.$$

由前面所得不等式, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|[f_n]\|_1 \leqslant M$. 从而由 1.45 节中的证明, 存在 $f\in\mathscr{L}^1$ 使对于 X 中几乎所有 x, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$. 进而,

$$\begin{aligned}\int_X\left|\sum_{n=1}^N f_n\right|^2\mathrm{d}\mu &\leqslant \int_X\left(\sum_{n=1}^N |f_n|\right)^2\mathrm{d}\mu \\ &= \left\|\left[\sum_{n=1}^N |f_n|\right]\right\|_2^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^N \|[f_n]\|_2\right)^2 \leqslant M^2.\end{aligned}$$

因 X 中几乎所有 x 使 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right|^2 = |f(x)|^2$, 由 Fatou 引理知 $|f|^2$ 可积, 即 f 属于 $\mathscr{L}^2$. 又序列 $\left\{\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|\right)^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的, 故 $k=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|\right)^2$ 可积. 诸 N 使 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f_n\right|^2 \leqslant k$ 且 X 中几乎所有 x 使 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|^2 = 0$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left\|[f]-\sum_{n=1}^{N}[f_n]\right\|_2 &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_X\left|f-\sum_{n=1}^{N} f_n\right|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_X\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\right|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned}$$

因此, L^2 是 Hilbert 空间. 最后, 像 1.45 节一样作个约定：自此以后将 L^2 中元素视为函数.

3.17 空间 H^2　以 $\mathbb{T}$ 记单位圆周, μ 是 $\mathbb{T}$ 上规范化的 Lebesgue 测度, $L^2(\mathbb{T})$ 是相对于测度 μ 的 Hilbert 空间. 相应 Hardy 空间 H^2 为 $L^2(\mathbb{T})$ 的如下闭线性子空间

$$\left\{f\in L^2(\mathbb{T}):\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0, n=1,2,3,\cdots\right\},$$

其中 χ_n 是函数 $z\mapsto z^n$. 上述定义可稍微变为如下形式

$$\{f\in L^2(\mathbb{T}):(f,\chi_n)=0,\ n=-1,-2,-3,\cdots\}.$$

3.18　在第 1 章中, 我们在定义一个 Banach 空间后会接着确立其对偶空间. 这个过程对于 Hilbert 空间而言是不必要的. 事实上, Hilbert 空间的对偶空间就等同于它本身. 这将是本章的主要结果.

我们先将到凸集距离的一个结果推广到 Hilbert 空间的凸集. 在 Euclid 空间中这一结果的大多数证明都使用了有界闭集的紧性, 但事实上使用完备性就够了.

3.19 定理　设 $\mathscr{K}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个非空闭凸集, 则 $\mathscr{K}$ 中有范数最小的唯一向量.

证明　设 $\delta=\inf\{\|f\|:f\in\mathscr{K}\}$, 则 $\mathscr{K}$ 中存在序列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|=\delta$. 对于 $f_n/2$ 和 $f_m/2$ 用平行四边形法则得

$$\left\|\frac{f_n-f_m}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{f_n}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{f_m}{2}\right\|^2 - 2\left\|\frac{f_n+f_m}{2}\right\|^2.$$

因为 $\mathscr{K}$ 是凸的, 所以 $(f_n+f_m)/2$ 属于 $\mathscr{K}$, 从而 $\|(f_n+f_m)/2\|^2 \geqslant \delta^2$. 因此,

$$\|f_n - f_m\|^2 \leqslant 2\|f_n\|^2 + 2\|f_m\|^2 - 4\delta^2.$$

由此可知

$$\limsup_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|^2 \leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

可见, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{K}$ 中一个 Cauchy 序列. 根据 $\mathscr{H}$ 的完备性和 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭集这个事实, 可以得 $f \in \mathscr{K}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. 又范数是连续的, 故 $\|f\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = \delta$.

在证明了 $\mathscr{K}$ 中范数最小的向量的存在性后, 接下来我们考虑其唯一性. 假设 $\mathscr{K}$ 中向量 f 和 g 满足等式 $\|f\| = \|g\| = \delta$. 再次用平行四边形法则得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 &= 2\left\|\frac{f}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{g}{2}\right\|^2 - 2\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} - \delta^2 = 0.\end{aligned}$$

这里我们用到了不等式 $\|(f+g)/2\| \geqslant \delta$. 因此 $f = g$, 唯一性得证. ■

设 π 是 3 维空间中一张平面而 l 是一条垂直于 π 的直线, 它们都过原点. 这个空间中任一向量都可唯一表示成 π 中一个向量和 l 中一个向量的和. 我们将把这一思想推广到 Hilbert 空间的线性子空间上去, 这见以下定义后的定理.

3.20 定义　设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个子集, 则 $\mathscr{M}$ 的正交补为 $\mathscr{H}$ 中与 $\mathscr{M}$ 中诸向量都正交的向量全体, 这记为 $\mathscr{M}^{\perp}$.

显然 $\mathscr{M}^{\perp}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, 它有可能只含零向量. 如果 $\mathscr{M}$ 不是只含零向量的子空间 $\{0\}$, 则 $\mathscr{M}^{\perp} \neq \mathscr{H}$.

3.21 定理　设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, 则 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 都有唯一正交分解 $f = g + h$ 使 g 属于 $\mathscr{M}$ 且 h 属于 $\mathscr{M}^{\perp}$.

证明　作 $\mathscr{H}$ 的非空闭凸集 $\mathscr{K} = \{f - k : k \in \mathscr{M}\}$, 它据定理 3.19 有范数最小的向量 h, 取 $g \in \mathscr{M}$ 使 $f = g + h$. 要说明 h 与 $\mathscr{M}$ 中诸单位向量 k 正交. 因 $h - (h,k)k$ 属于 $\mathscr{K}$, 故

$$\begin{aligned}0 \leqslant &\|h - (h,k)k\|^2 - \|h\|^2 \\ = &-2\overline{(h,k)}(h,k) + |(h,k)|^2.\end{aligned}$$

于是 $|(h,k)|^2 \leqslant 0$, 从而 $(h,k) = 0$, 即 h 与 $\mathscr{M}$ 正交. 正交分解的存在性得证.

为说明正交分解的唯一性, 设 $\mathscr{M}$ 中存在向量 g_1 且 $\mathscr{M}^{\perp}$ 中存在向量 h_1 使

$$g_1 + h_1 = g + h.$$

此式表明 $g-g_1$ 等于 h_1-h, 因它们各属于 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}^\perp$, 故

$$\|g-g_1\|^2=(g-g_1,h_1-h)=0,$$

这表明 $g_1=g$, 从而 $h_1=h$. ■

3.22 推论　设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个线性子空间, 则 $\mathscr{M}^{\perp\perp}=\operatorname{clos}\mathscr{M}$.

证明　易知 $\mathscr{H}$ 的诸子集 $\mathscr{L}$ 都满足 $\operatorname{clos}\mathscr{L}\subset\mathscr{L}^{\perp\perp}$. 现在, 据定理 3.21 知 $\mathscr{M}^{\perp\perp}$ 中向量 f 都有正交分解 $g+h$ 使 g 属于 $\operatorname{clos}\mathscr{M}$ 且 h 属于 $\mathscr{M}^\perp$. 于是

$$0=(f,h)=(g+h,h)=(h,h)=\|h\|^2.$$

因此 $h=0$, 而 f 属于 $\operatorname{clos}\mathscr{M}$. ■

设 g 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中一个向量, 则 $\mathscr{H}$ 上有复线性泛函 $\varphi_g: f\mapsto(f,g)$. 进而因为 $|\varphi_g(f)|\leqslant\|f\|\;\|g\|$, 所以 φ_g 是有界的且 $\|\varphi_g\|\leqslant\|g\|$. 又由

$$\|g\|^2=\varphi_g(g)\leqslant\|\varphi_g\|\;\|g\|$$

得 $\|g\|\leqslant\|\varphi_g\|$. 从而 $\|\varphi_g\|=\|g\|$.

以下定理说明 $\mathscr{H}$ 上任何有界线性泛函都是以上这种形式.

3.23 定理 (Riesz 表示定理)　设 φ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个有界线性泛函, 则 $\mathscr{H}$ 中有唯一向量 g 使 $\mathscr{H}$ 中诸向量 g 满足 $\varphi(f)=(f,g)$.

证明　设 $\mathscr{K}$ 是 φ 的核, 即 $\mathscr{K}=\{f\in\mathscr{H}:\varphi(f)=0\}$. 因为 φ 是连续性的, 所以 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间. 若 $\mathscr{K}=\mathscr{H}$, 则诸 $f\in\mathscr{H}$ 使 $\varphi(f)=(f,0)$ 而定理获证. 若 $\mathscr{K}\neq\mathscr{H}$, 则由定义 3.20 后的说明, 某个单位向量 h 与 $\mathscr{K}$ 正交. 因 h 不属于 $\mathscr{K}$, 故 $\varphi(h)\neq 0$, 命 $g=\overline{\varphi(h)}h$. 对于 $f\in\mathscr{H}$, 因为 $\varphi(f-\dfrac{\varphi(f)}{\varphi(h)}h)=0$, 所以 $f-\dfrac{\varphi(f)}{\varphi(h)}h$ 属于 $\mathscr{K}$, 这样

$$\begin{aligned}\varphi(f)=\varphi(f)(h,h)&=\left(\frac{\varphi(f)}{\varphi(h)}h,\overline{\varphi(h)}h\right)\\&=\left(f-\frac{\varphi(f)}{\varphi(h)}h,\overline{\varphi(h)}h\right)+\left(\frac{\varphi(f)}{\varphi(h)}h,\overline{\varphi(h)}h\right)\\&=\left(f,\overline{\varphi(h)}h\right)=(f,g).\end{aligned}$$

设诸 $f\in\mathscr{H}$ 使 $(f,g_1)=(f,g_2)$, 特别地 $(g_1-g_2,g_1-g_2)=0$, 从而 $g_1=g_2$. 唯一性得证. ■

因此, 从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^*$ 的映射 $g\mapsto\varphi_g$ 不仅保持范数而且是到上的. 进而, 直接验证可知该映射是共轭线性的, 即对于复数 α_1 和 α_2 及 $\mathscr{H}$ 中向量 g_1 和 g_2, 有

$$\varphi_{\alpha_1g_1+\alpha_2g_2}=\overline{\alpha_1}\varphi_{g_1}+\overline{\alpha_2}\varphi_{g_2}.$$

据此映射, 多数情形下可将 $\mathscr{H}^*$ 等同于 $\mathscr{H}$.

3.24　在复线性空间理论里, 一个线性空间在同构意义下可由其代数维数来刻画. 虽然这对于 Banach 空间不成立, 但对于 Hilbert 空间而言, 在将维数定义作出适当改变后, 该结论是正确的. 在给出这个定义之前, 我们需要将 Pythagoras 定理推广到无穷正交集上.

3.25 定理　设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个正交集, 则 $\mathscr{H}$ 中级数 $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ 收敛当且仅当正项级数 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|^2$ 收敛. 此时, $\left\|\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\right\|^2=\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|^2$.

证明　以 $\mathscr{F}$ 记 A 的有限子集全体依包含关系所成的定向集. 如果 $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ 收敛, 则根据定义 1.8、范数的连续性以及 Pythagoras 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\alpha\in A} f_\alpha\right\|^2&=\left\|\lim_{F\in\mathscr{F}}\sum_{\alpha\in F} f_\alpha\right\|^2=\lim_{F\in\mathscr{F}}\left\|\sum_{\alpha\in F} f_\alpha\right\|^2\\&=\lim_{F\in\mathscr{F}}\sum_{\alpha\in F}\|f_\alpha\|^2=\sum_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|^2.\end{aligned}$$

因此, 如果 $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ 收敛, 则 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|^2<\infty$.

反之, 设 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|^2<\infty$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $F_0\in\mathscr{F}$ 使得 $F\geqslant F_0$ 蕴涵 $\sum\limits_{\alpha\in F}\|f_\alpha\|^2-\sum\limits_{\alpha\in F_0}\|f_\alpha\|^2<\varepsilon^2$. 因此, 对于 $\mathscr{F}$ 中 F_1 和 F_2, 当 $F_1,F_2\geqslant F_0$ 时, 据 Pythagoras 定理得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\alpha\in F_1} f_\alpha-\sum_{\alpha\in F_2} f_\alpha\right\|^2&=\sum_{\alpha\in F_1\backslash F_2}\|f_\alpha\|^2+\sum_{\alpha\in F_2\backslash F_1}\|f_\alpha\|^2\\&=\sum_{\alpha\in F_1\cup F_2}\|f_\alpha\|^2-\sum_{\alpha\in F_0}\|f_\alpha\|^2<\varepsilon^2,\end{aligned}$$

因此, $\left\{\sum\limits_{\alpha\in F} f_\alpha\right\}_{F\in\mathscr{F}}$ 是 Cauchy 网, 而 $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ 收敛. ■

3.26 推论　设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中包含规范正交集 $\{e_\alpha:\alpha\in A\}$ 的最小闭线性子空间, 则

$$\mathscr{M}=\left\{\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha e_\alpha:\lambda_\alpha\in\mathbb{C},\sum_{\alpha\in A}|\lambda_\alpha|^2<\infty\right\}.$$

证明　上式右端记为 $\mathscr{N}$ 而以 $\mathscr{F}$ 记 A 的有限子集全体. 若复数组 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 满足 $\sum\limits_{\alpha\in A}|\lambda_\alpha|^2<\infty$, 则向量集 $\{\lambda_\alpha e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正交集且 $\sum\limits_{\alpha\in A}\|\lambda_\alpha e_\alpha\|^2<\infty$. 因此, 根

据定理 3.25, 存在向量 $f \in \mathscr{H}$ 使

$$f = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha e_\alpha = \lim_{F \in \mathscr{F}} \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha.$$

于是 f 属于 $\mathscr{N}$. 因为 $\mathscr{N}$ 包含 $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$, 所以我们只需证明 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间.

设 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 和 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 满足 $\sum\limits_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha|^2 < \infty$ 和 $\sum\limits_{\alpha \in A} |\mu_\alpha|^2 < \infty$, 则

$$\sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha + \mu_\alpha|^2 \leqslant 2 \sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha|^2 + 2 \sum_{\alpha \in A} |\mu_\alpha|^2 < \infty.$$

因此, $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个线性子空间.

任取 $\mathscr{N}$ 中一个 Cauchy 序列 $\{f^n\}_{n=1}^\infty$, 设 $f^n = \sum\limits_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^{(n)} e_\alpha$. 对于每个 $\alpha \in A$,

$$\begin{aligned} \left|\lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha^{(m)}\right| &\leqslant \left(\sum_{\alpha \in A} \left|\lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha^{(m)}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f^n - f^m\|. \end{aligned}$$

从而 $\lambda_\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_\alpha^{(n)}$ 存在. 而且对于 $F \in \mathscr{F}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F} |\lambda_\alpha|^2 &= \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in F} \left|\lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 \\ &\leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in A} \left|\lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 = \lim_{n \to \infty} \|f^n\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

因此, $f = \sum\limits_{\alpha \in A} \lambda_\alpha e_\alpha$ 有意义且是 $\mathscr{N}$ 中元素. 任意给定 $\varepsilon > 0$, 取 N 使得 $n, m \geqslant N$ 蕴涵 $\|f^n - f^m\| < \varepsilon$. 对于 $F \in \mathscr{F}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F} \left|\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 &= \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha \in F} \left|\lambda_\alpha^{(m)} - \lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 \\ &\leqslant \limsup_{m \to \infty} \|f^m - f^n\| \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

于是当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} \left\|f - f^{(n)}\right\|^2 &= \sum_{\alpha \in F} \left|\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 \\ &= \lim_{F \in \mathscr{F}} \sum_{\alpha \in F} \left|\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^{(n)}\right|^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

从而 $\mathscr{N}$ 是闭的. ■

3.27 定义 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个子集 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为 $\mathscr{H}$ 的一个规范正交基是指它为规范正交的且包含它的最小闭线性子空间是 $\mathscr{H}$.

在表示空间中向量方面, 规范正交基有非常好的性质.

3.28 推论 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个规范正交基且 f 是 $\mathscr{H}$ 中一个向量, 则有唯一复数组 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $f=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha e_\alpha$. 诸 λ_α 为 f 相对于 e_α 的 Fourier 系数且 $\lambda_\alpha=(f,e_\alpha)$.

证明 由上述推论和定义知数组 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 存在. 仍以 $\mathscr{F}$ 记 A 的有限子集全体, 对于 $\beta\in A$, 有

$$\begin{aligned}(f,e_\beta)&=\left(\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha e_\alpha,e_\beta\right)=\lim_{F\in\mathscr{F}}\left(\sum_{\alpha\in F}\lambda_\alpha e_\alpha,e_\beta\right)\\&=\lim_{F\in\mathscr{F}}\sum_{\alpha\in F}(e_\alpha,e_\beta)=\lim_{F\in\mathscr{F},\beta\in F}\lambda_\beta=\lambda_\beta.\end{aligned}$$

(极限不受影响的原因在于 A 中包含元素 β 的有限子集全体在 $\mathscr{F}$ 中共尾.) 因此, 数组 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 由诸式 $\lambda_\alpha=(f,e_\alpha)$ 唯一确立. ■

3.29 定理 非零 Hilbert 空间都有个规范正交基.

证明 以 $\mathscr{E}$ 记 $\mathscr{H}$ 中规范正交集 E 全体, 其上有偏序使 $E_1\leqslant E_2$ 意指 $E_1\subseteq E_2$. 我们将用 Zorn 引理证明有个极大规范正交集, 并证明它就是规范正交基. 为此, 任取 $\mathscr{E}$ 的一个链 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. 显然 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 是 $\mathscr{H}$ 中一个规范正交集, 从而属于 $\mathscr{E}$. 因此, 诸链都有上界, 而 $\mathscr{E}$ 便有个极大元 E_M. 命 $\mathscr{M}$ 是包含 E_M 的最小闭线性子空间. 如果 $\mathscr{M}\neq\mathscr{H}$, 则诸单位向量 $e\in\mathscr{M}^\perp$ 使规范正交集 $E_M\bigcup\{e\}$ 比 E_M 大, 这与 E_M 的极大性矛盾. 可见, $\mathscr{M}=\mathscr{H}$ 而 E_M 为所求的一个规范正交基. ■

虽然规范正交基不具有唯一性, 非零 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 有无限多个规范正交基, 但是规范正交基的基数只与 $\mathscr{H}$ 有关.

3.30 定理 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ 都是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的规范正交基, 则

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B.$$

证明 若 A 或 B 是有限集, 则结论源自线性代数. 因此可设 A 和 B 是无限集. 对于 $\alpha\in A$, 命 $B_\alpha=\{\beta\in B:(e_\alpha,f_\beta)\neq0\}$. 据推论 3.28 知 $e_\alpha=\sum\limits_{\beta\in B}(e_\alpha,f_\beta)f_\beta$, 据定理 3.25 知 $1=\|e_\alpha\|^2=\sum\limits_{\beta\in B}|(e_\alpha,f_\beta)|^2$, 故 $\operatorname{card}B_\alpha\leqslant\aleph_0$. 又 $f_\beta=\sum\limits_{\alpha\in A}(e_\alpha,f_\beta)e_\alpha$, 故有个 $\alpha\in A$ 使 $(e_\alpha,f_\beta)\neq0$. 因此, $B=\bigcup\limits_{\alpha\in A}B_\alpha$, 结合 $\operatorname{card}A\geqslant\aleph_0$ 得

$$\operatorname{card}B\leqslant\sum_{\alpha\in A}B_\alpha\leqslant\sum_{\alpha\in A}\aleph_0=\operatorname{card}A.$$

根据对称性得反向不等式, 于是 $\text{card}A = \text{card}B$. ■

3.31 定义 若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 其维数为其任意一个规范正交基的基数并记为 $\dim \mathscr{H}$.

根据上述两个定理, Hilbert 空间的维数是合理定义的. 接下来我们证明具有相同维数的两个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是同构的, 即从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 有等距同构, 它保持内积.

3.32 定理 两个 Hilbert 空间是等距同构的当且仅当它们有相同维数.

证明 设 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是两个 Hilbert 空间使 $\dim\mathscr{H} = \dim\mathscr{K}$, 则 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 分别有个规范正交基 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 考虑从 $\mathscr{H}$ 至 $\mathscr{K}$ 的映射 $\Phi : g \mapsto \sum\limits_{\alpha\in A}(g, e_\alpha)f_\alpha$. 据推论 3.28 得 $g = \sum\limits_{\alpha\in A}(g, e_\alpha)e_\alpha$, 据定理 3.25 得 $\sum\limits_{\alpha\in A}|(g, e_\alpha)|^2 = \|g\|^2$. 因此 Φ 是合理定义的且

$$\|\Phi g\|^2 = \sum_{\alpha\in A}|(g, e_\alpha)|^2 = \|g\|^2.$$

显然 Φ 是线性的. 因此, Φ 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 的等距同构, 而 $\Phi\mathscr{H}$ 便是 $\mathscr{K}$ 的闭线性子空间且包含 $\mathscr{K}$ 的规范正交基 $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$. 根据基的定义, $\Phi\mathscr{H} = \mathscr{K}$. 最后, 对于 $g \in \mathscr{H}$ 有

$$(g, g) = \|g\|^2 = \|\Phi g\|^2 = (\Phi g, \Phi g),$$

而据极化恒等式知 $\mathscr{H}$ 中向量 g 和 h 都满足等式 $(g, h) = (\Phi g, \Phi h)$. ■

3.33 本章最后, 我们来计算例 3.13、例 3.15、例 3.16 和例 3.17 中诸空间的维数. 对于 $\mathbb{C}^n$, 显然

$$\{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)\}$$

构成一个规范正交基. 因此 $\dim \mathbb{C}^n = n$. 类以可知 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 有规范正交集 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$, 其中 e_n 在 n 处取值 1 而在其他处取值 0, 而 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 中向量 f 都形如 $\sum\limits_{n=0}^\infty f(n)e_n$. 因此 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 有规范正交基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$, 这样 $\dim\left[\ell^2(\mathbb{Z}^+)\right] = \aleph_0$.

在 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$ 中, 集合 $\left\{\mathrm{e}^{2\pi inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个规范正交集, 这是因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx}\overline{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}\end{aligned}$$

据广义 Stone-Weierstrass 定理, $\left\{\mathrm{e}^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ 张成的一致闭包是周期为 1 的连续函数全体 P, 后者便含于 $L^2[0, 1]$ 中的包含 $\left\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ 的最小闭线性子空间中.

对于 $f \in L^2[0,1]$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_2=0$, 其中

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\leqslant k,\\ 0, & |f(x)|>k.\end{cases}$$

因此 $L^\infty[0,1]$ 在 $L^2[0,1]$ 中稠密. 改变 f 在区间端点的值不影响 Lebesgue 积分, 可要求 f 在端点都取值 0. 简单函数全体在 $L^\infty[0,1]$ 中依 L^∞- 范数稠密, 对于任意正数 ε 和 (0,1) 中任意 Lebegsue 可测集 E, 要找到 $g\in P$ 使 $\|g-I_E\|_2<\varepsilon$.

据 Lebesgue 测度的正则性得 (0,1) 中一个紧集 K 和一个开集 V 使 $K\subset E\subset V$ 且 $V\backslash K$ 的 Lebesgue 测度小于 ε^2. 据 Urysohn 引理知存在连续函数 $g:[0,1]\to[0,1]$ 使 $g|_K=1$ 而 $g|_{[0,1]\backslash V}=0$. 于是 g 属于 P 且

$$\begin{aligned}\|I_E-g\|_2^2&=\int_{[0,1]}|I_E(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{V\backslash K}|I_E(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon^2.\end{aligned}$$

故 P 是 $L^2[0,1]$ 的一个稠密子空间, 而 $L^2[0,1]$ 中包含 $\{\mathrm{e}^{2\pi inx}:n\in\mathbb{Z}\}$ 的最小闭线性子空间便是 $L^2[0,1]$ 本身. 因此 $\{\mathrm{e}^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2[0,1]$ 的标准正交基, 这样 $\dim L^2[0,1]=\aleph_0$. 于是, 尽管 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 与 $L^2[0,1]$ 表面上看起来不一样, 但它们是同构的.

类似地, 通过变量替换, 我们可以证明 $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的一个规范正交基, 从而可知 $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 H^2 的一个规范正交基. 因此 $\dim H^2=\aleph_0$.

在习题中, 我们将陈述如何构造任意维数的 Hilbert 空间.

注　记

Hilbert 空间的定义源自 von Neumann. 他与 Hilbert, Riesz, Stone 及其他一些人建立了这个学科的基础理论. Hilbert 空间几何的介绍见于很多泛函分析教材, 特别见于 Stone[104], Halmos[55], Riesz 和 Sz-Nagy[92], Akhiezer 和 Glazman[2].

习　题

习题 3.1　设 A 是个非空集合, 证明在点态运算下以下集合

$$\ell^2(A)=\left\{f:A\to\mathbb{C}:\sum_{\alpha\in A}|f(\alpha)|^2<\infty\right\}$$

依内积 $(f,g)=\sum\limits_{\alpha\in A}f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$ 是 Hilbert 空间. 证明 $\dim\ell^2(A)=\operatorname{card}A$.

习题 3.2　设平行四边形法则对于赋范线性空间 $\mathscr{L}$ 有效, 证明在 $\mathscr{L}$ 上可定义一个内积使其诱导的范数就是给定的范数.

习题 3.3　证明内积空间的完备化空间是个 Hilbert 空间.

习题 3.4　证明 $C[0,1]$ 不是 Hilbert 空间, 即 $C[0,1]$ 上没有内积使相应范数是上确界范数.

习题 3.5　证明 $C[0,1]$ 不拓扑同构于一个 Hilbert 空间.

习题 3.6　完成 3.14 节的证明, 即证明那里定义的空间 $\mathscr{L}$ 不完备.

习题 3.7　举一例有限维 Banach 空间使其某个闭凸集有多个范数最小的点.

习题 3.8　举一例无限维 Banach 空间使其某个闭凸集没有范数最小的点.

习题 3.9　证明 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的线性子空间 $\mathscr{M}$ 上有界线性泛函 φ 在 $\mathscr{H}$ 上都有唯一保范扩张.

习题 3.10　证明 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 的代数直和 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 上有内积

$$(\langle h_1,k_1\rangle,\langle h_2,k_2\rangle)=(h_1,h_2)+(k_1,k_2),$$

代数直和依此内积是完备的且有正交的闭线性子空间 $\mathscr{H}\oplus 0$ 和 $0\oplus\mathscr{K}$.

习题 3.11　证明 Hilbert 空间中诸单位向量都是其单位球的端点.

习题 3.12　证明无限维 Hilbert 空间的单位球面的弱 * 闭包是整个单位球.

习题 3.13　证明 Hilbert 空间的每个规范正交子集都包含在某个规范正交基中.

习题 3.14　设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, 则 $\dim\mathscr{M}\leqslant\dim\mathscr{H}$.

习题 3.15(Gram-Schmidt)　设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个子集, 其闭线性包是 $\mathscr{H}$. 约定 $0/0=0$, 命 $e_1=f_1/\|f_1\|$, 归纳地设 $\{e_k\}_{k=1}^n$ 已定义, 命

$$e_{n+1}=\frac{f_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^{n}(f_{n+1},e_k)e_k}{\left\|f_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^{n}(f_{n+1},e_k)e_k\right\|}.$$

证明 $\{e_n\}_{n=1}^\infty\setminus\{0\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的规范正交基.

习题 3.16　证明 $L^2[0,1]$ 存在规范正交基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 使 e_n 是 n 次多项式.

习题 3.17　设 $\mathscr{L}$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个稠密线性子空间, 证明 $\mathscr{L}$ 包含 $\mathscr{H}$ 的一个规范正交基. 对于不可分 Hilbert 空间, 考虑同样的问题.*

习题 3.18　举一例 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 使其某两个闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 的代数和

$$\mathscr{M}+\mathscr{N}=\{f+g:f\in\mathscr{M},g\in\mathscr{N}\}$$

不是闭的.* (提示: 设 $\mathscr{H}=\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}$, 适当取有界线性算子 $T:\mathscr{K}\to\mathscr{K}$ 并命 $\mathscr{M}$ 是 T 的图像而 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{K}\oplus 0$.)

习题 3.19　证明没有线性维数为 $\aleph_0$ 的 Hilbert 空间. (提示: 使用 Baire 纲定理.)

习题 3.20　设 $\mathscr{H}$ 为无限维 Hilbert 空间, 则 $\dim\mathscr{H}$ 等于 $\mathscr{H}$ 的稠密子集的基数中最小者.

习题 3.21　设 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是 Hilbert 空间而 $\mathscr{H}\otimes_a\mathscr{K}$ 是其代数张量积, 这作为 $\mathbb{C}$ 上线性空间, 证明其上有内积

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_i\otimes k_i, \sum_{j=1}^{n} h_j'\otimes k_j'\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(h_i,h_j')(k_i,k_j').$$

该内积空间的完备化记为 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$. 证明: 若 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ 分别是 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 的规范正交基, 则 $\{e_\alpha\otimes f_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ 是 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ 的一个规范正交基.

习题 3.22　设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是有限测度空间, 而 φ 是 $L^1(X)$ 上一个有界线性泛函. 证明 φ 在 $L^2(X)$ 上的限制是 $L^2(X)$ 上一个有界线性泛函, 故存在 $g\in L^2(X)$ 使诸 $f\in L^2(X)$ 满足 $\varphi(f)=\int\limits_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu$. 再证明 g 属于 $L^\infty(X)$, 于是得到 $L^1(X)^*$ 等同于 $L^\infty(X)$ 的刻画. (在该题中, 既没用到第 1 章中获得的相关结果也没用到 Radon-Nikodym 定理.)

习题 3.23(von Neumann)　设 μ 和 ν 是可测空间 $(X,\mathscr{S})$ 上有限正测度使 ν 相对于 μ 绝对连续. 证明 $f\mapsto\int\limits_X f\mathrm{d}\mu$ 是 $L^2(\mu+\nu)$ 上有意义的一个有界线性泛函. 设 $L^2(\mu+\nu)$ 中一个函数 φ 满足 $\int\limits_X f\mathrm{d}(\mu+\nu)=\int\limits_X f\mathrm{d}\mu$, 则 $(1-\varphi)/\varphi$ 属于 $L^1(\mu)$ 且

$$\nu(E)=\int_E\frac{1-\varphi}{\varphi}\mathrm{d}\mu, E\in\mathscr{S}$$

习题 3.24　在 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间时, 试解释习题 1.30 和习题 1.31 中的结果.

第 4 章　Hilbert 空间上算子和 C*-代数

4.1　线性代数的大部分内容涉及研究线性空间之间保持线性结构的变换, 即线性变换. 在研究 Hilbert 空间时, 情况也是类似的. 本书的剩余部分, 我们主要讨论作用于 Hilbert 空间的有界线性变换. 尽管某些类型的无界线性变换也很重要, 但我们只在习题中考虑它们.

我们开始用算子一词表示有界线性变换. 以下命题保证了我们所称的 "共轭算子" 的存在性和唯一性.

4.2 命题　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $\mathscr{H}$ 上有唯一算子 S 使 $\mathscr{H}$ 中向量 f 和 g 都满足下式

$$(Tf, g) = (f, Sg).$$

证明　任给 $g \in \mathscr{H}$, 考虑 $\mathscr{H}$ 上线性泛函 $\varphi : f \mapsto (Tf, g)$. 易见其有界性, 从而由 Riesz 表示定理得唯一 $h \in \mathscr{H}$ 使诸 $f \in \mathscr{H}$ 满足 $\varphi(f) = (f, h)$. 规定 $Sg = h$, 得等式 $(Tf, g) = (f, Sg)$.

显然, S 是线性的. 在上式中命 $f = Sg$, 得以下不等式

$$\|Sg\|^2 = (Sg, Sg) = (TSg, g) \leqslant \|T\|\|Sg\|\|g\|.$$

因此诸 $g \in \mathscr{H}$ 使 $\|Sg\| \leqslant \|T\|\|g\|$, 即 $\|S\| \leqslant \|T\|$ 而 S 便是 $\mathscr{H}$ 上一个算子.

为证唯一性, 设 S_0 也是 $\mathscr{H}$ 上一个算子使所有向量 f 和 g 满足 $(f, S_0 g) = (Tf, g)$. 于是 $(f, S_0 g - Sg) = 0$, 在左式中命 $f = S_0 g - Sg$ 得 $S_0 g = Sg$, 因此 $S_0 = S$. ■

4.3 定义　称 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T^* 为 $\mathscr{H}$ 上算子 T 的共轭算子是指 $\mathscr{H}$ 中所有向量 f 和 g 满足等式 $(Tf, g) = (f, T^* g)$.

共轭算子的唯一性源自命题 4.2. 以下命题总结了对合运算 $T \mapsto T^*$ 的一些性质. 在许多情形, 这个对合与复数的共轭起着类似的作用.

4.4 命题　设以下算子作用于复 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 而数都是复数.

(1) $T^{**} = (T^*)^* = T$;

(2) $\|T\| = \|T^*\|$;

(3) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$ 且 $(ST)^* = T^* S^*$;

(4) T 可逆时, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;

(5) $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

证明　(1) 若 f 和 g 属于 $\mathscr{H}$, 则

$$\begin{aligned}(f, T^{**}g) &= (T^*f, g) = \overline{(g, T^*f)} \\ &= \overline{(Tg, f)} = (f, Tg),\end{aligned}$$

因此 $T^{**} = T$.

(2) 命题 4.2 的证明已得 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$, 以 T^* 代替 T 得 $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$. 再结合 (1) 变等式.

(3) 直接计算.

(4) 据逆算子定理知 T^{-1} 有界, 其共轭便有意义. 由 (3) 知

$$\begin{aligned}T^*(T^{-1})^* &= (T^{-1}T)^* = I \\ &= (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*,\end{aligned}$$

由此知 T^* 可逆且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(5) 首先 $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\,\|T\|$, 结合 (2) 得 $\|T^*T\| \leqslant \|T\|^2$. 我们还需验证 $\|T^*T\| \geqslant \|T\|^2$. 为此取 $\mathscr{H}$ 中单位向量序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tf_n\| = \|T\|$. 于是有

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &\geqslant \limsup_{n\to\infty} \|T^*Tf_n\| \\ &\geqslant \limsup_{n\to\infty} (T^*Tf_n, f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|^2 = \|T\|^2.\end{aligned}$$

这就完成了证明. ■

4.5 定义　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 闭子空间 $\{f \in \mathscr{H} : Tf = 0\}$ 称为 T 的核并记为 $\ker T$; 子空间 $\{Tf : f \in \mathscr{H}\}$ 称为 T 的值域并记为 $\operatorname{ran}T$.

4.6 命题　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $\ker T = (\operatorname{ran}T^*)^{\perp}$ 且 $\ker T^* = (\operatorname{ran}T)^{\perp}$.

证明　由命题 4.4(1) 知只需证明第一个等式. 为此, 设 f 属于 $\ker T$, 则 $\mathscr{H}$ 中诸向量 g 使

$$(T^*g, f) = (g, Tf) = 0,$$

即 f 正交于 $\operatorname{ran}T^*$. 反之, 若 f 正交于 $\operatorname{ran} T^*$, 则诸 $g \in \mathscr{H}$ 使

$$(Tf, g) = (f, T^*g) = 0,$$

这表明 $Tf = 0$, 即 f 属于 $\ker T$. ■

下面我们将推导出算子可逆性的有用准则.

4.7 定义 称 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子 T 是下有界的是指存在常数 $\varepsilon > 0$ 使任意 $f \in \mathscr{H}$ 满足不等式 $\|Tf\| \geqslant \varepsilon\|f\|$.

4.8 命题 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 T 可逆当且仅当 T 是下有界的且有稠密值域.

证明 若 T 可逆, 则 T 有值域 $\mathscr{H}$, 这自然稠于 $\mathscr{H}$. 又诸 $f \in \mathscr{H}$ 使

$$\|Tf\| \geqslant \frac{\|T^{-1}Tf\|}{\|T^{-1}\|} = \frac{\|f\|}{\|T^{-1}\|},$$

从而 T 下有界. 反之, 若 T 下有界, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使诸 $f \in \mathscr{H}$ 满足 $\|Tf\| \geqslant \varepsilon\|f\|$, 则显然 T 是一对一的. 任取值域 $\operatorname{ran}T$ 中收敛序列 $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则不等式

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|Tf_n - Tf_m\|$$

表明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 序列, 其极限 f 便使 $Tf = \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n$, 这表明 $\operatorname{ran}T$ 是闭子空间. 若 T 还有稠密值域, 则 $\operatorname{ran}T = \mathscr{H}$. 可见, T 有逆变换 T^{-1}. 最后, $\mathscr{H}$ 中诸向量 g 使

$$\|T^{-1}g\| \leqslant \frac{\|T(T^{-1}g)\|}{\varepsilon} = \frac{\|g\|}{\varepsilon},$$

因此 T^{-1} 是有界的. ■

4.9 推论 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子. 若 T 和 T^* 都是下有界的, 则 T 可逆.

证明 若 T^* 下有界, 则 $\ker T^* = \{0\}$. 由命题 4.6 可得

$$(\operatorname{ran}T)^{\perp} = \ker T^* = \{0\}.$$

由推论 3.22 得

$$\operatorname{clos}[\operatorname{ran}T] = (\operatorname{ran}T)^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathscr{H}.$$

可见, $\operatorname{ran}T$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密. 从而由命题 4.8 立得结果. ■

4.10 若 T 是有限维 Hilbert 空间 $\mathbb{C}^n$ 上一个算子且 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个规范正交基, 则 T 的作用可由矩阵 $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 表示, 其中 $a_{ij} = (Te_j, e_i)$. 共轭算子 T^* 有表示矩阵 $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$, 这里 $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

作用于 $\mathbb{C}^n$ 的最简单的算子是那些在适当规范正交基下的表示矩阵是对角阵的算子, 也就是说 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$. 一个算子属于这种类型当且仅当它与其共轭算子交换. 这个结论的一方面是显然的, 而另一方面则是所谓矩阵“谱定理”的内容.

这个定理对于无限维 Hilbert 空间上算子不总是成立. 然而, Hilbert 证明这个结论在适当重新阐述后对任何 Hilbert 空间上算子都成立. 这个“谱定理”是本章的主要定理.

我们从定义相关的算子类入手.

4.11 定义　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子.

(1) 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 是正规算子;

(2) 若 $T^* = T$, 则称 T 是自伴算子或者 Hermite 算子;

(3) 若诸 $f \in \mathscr{H}$ 使 $(Tf, f) \geqslant 0$, 则称 T 是正算子;

(4) 若 $T^*T = TT^* = I$, 则称 T 是酉算子.

以下命题给出了自伴算子的刻画.

4.12 命题　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子 T 是自伴的当且仅当 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 使内积 (Tf, f) 为实数.

证明　若 T 是自伴的, 则诸 $f \in \mathscr{H}$ 使

$$(Tf, f) = (f, T^*f) = (f, Tf) = \overline{(Tf, f)},$$

因此 (Tf, f) 是实数. 反之, 若诸 $f \in \mathscr{H}$ 使 (Tf, f) 为实数, 对以下极化恒等式

$$(Tf, g) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mathrm{i}^k (T(f + \mathrm{i}^k g), f + \mathrm{i}^k g)}{4}$$

两端取复数的共轭得 $\overline{(Tf, g)} = (Tg, f)$, 从而 $T^* = T$. ■

4.13 推论　若 P 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正算子, 则 P 是自伴的.

证明　显然. ■

4.14 命题　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 T^*T 是正算子.

证明　诸 $f \in \mathscr{H}$ 使 $(T^*Tf, f) = \|Tf\|^2 \geqslant 0$, 由此得结论. ■

当言及 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T 的谱时, 我们意指 T 作为 Banach 代数 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 中元素的谱, 这记为 $\sigma(T)$. 对于有限维空间, λ 属于 T 的谱当且仅当 λ 是 T 的本征值. 然而这结论对于无限维 Hilbert 空间上算子不总是成立.

在线性代数, 人们证明了 Hermite 矩阵的本征值都是实数. 这个结论在推广至 Hermite 算子时应取以下形式.

4.15 命题　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个自伴算子, 则其谱是实的. 当 T 还是正算子时, 其谱非负.

证明　当 α 和 β 是实数使 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 要证明 $T - \lambda I$ 可逆. 算子 $K = (T - \alpha I)/\beta$ 是自伴的且 $K - \mathrm{i}I = (T - \lambda I)/\beta$, 因此 $T - \lambda I$ 可逆等价于 $K - \mathrm{i}I$ 可逆. 基于命题 4.9, 一旦证明了 $K - \mathrm{i}I$ 和 $(K - \mathrm{i}I)^* = K + \mathrm{i}I$ 下有界, 结论立即成立. 然而, 对于 $f \in \mathscr{H}$ 有

$$\begin{aligned}\|Kf \pm \mathrm{i}f\|^2 &= (Kf \pm \mathrm{i}f, Kf \pm \mathrm{i}f) \\ &= \|Kf\|^2 \mp \mathrm{i}(Kf, f) \pm \mathrm{i}(f, Kf) + \|f\|^2 \\ &= \|Kf\|^2 + \|f\|^2 \geqslant \|f\|^2.\end{aligned}$$

因此自伴算子的谱是实的.

若 T 还是正算子且 $\lambda < 0$, 则 $(T-\lambda I)^* = T-\lambda I$ 且

$$\|Tf-\lambda f\|^2 = \|Tf\|^2 - 2\lambda(Tf,f) + \lambda^2\|f\|^2 \geqslant \lambda^2\|f\|^2.$$

因此 $T-\lambda I$ 下有界, 它据命题 4.9 便可逆. ■

我们现在考虑一类特殊正算子, 在谱定理中将会明白, 在某种意义下, 这类算子是构成自伴算子的基石.

4.16 定义 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 P 是投影算子是指它既幂等 $(P^2=P)$ 又自伴.

以下构造给出了一个投影算子. 事实上, 每个投影算子都是依以下方式产生的.

4.17 定义 设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 有唯一正交分解 $g+h$ 使 g 属于 $\mathscr{M}$ 且 h 属于 $\mathscr{M}^\perp$, 规定 $P_{\mathscr{M}}f=g$.

4.18 定理 若 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, 则 $P_{\mathscr{M}}$ 是值域为 $\mathscr{M}$ 的投影算子. 反之, 若 P 是 $\mathscr{H}$ 上一个投影算子, 则存在闭线性子空间 $\mathscr{M}(=\operatorname{ran}P)$ 使 $P=P_{\mathscr{M}}$.

证明 我们先证 $P_{\mathscr{M}}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子. 若向量 f_1 和 f_2 属于 $\mathscr{H}$, 则有 $\mathscr{M}$ 中向量 g_1 和 g_2 以及 $\mathscr{M}^\perp$ 中向量 h_1 和 h_2 使 $f_1=g_1+h_1$ 和 $f_2=g_2+h_2$. 诸复数 λ_1 和 λ_2 便使

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2 = (\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)+(\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2),$$

而 $\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$ 属于 $\mathscr{M}$ 且 $\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2$ 属于 $\mathscr{M}^\perp$. 据正交分解的唯一性得

$$P_{\mathscr{M}}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2) = \lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2 = \lambda_1 P_{\mathscr{M}} f_1+\lambda_2 P_{\mathscr{M}} f_2,$$

因此 $P_{\mathscr{M}}$ 是线性的. 现在, 由不等式

$$\|P_{\mathscr{M}} f_1\|^2 = \|g_1\|^2 \leqslant \|g_1\|^2+\|h_1\|^2 = \|f_1\|^2$$

知 $P_{\mathscr{M}}$ 有界且其范数至多为 1. 因此 $P_{\mathscr{M}}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子. 进而, 由等式

$$\begin{aligned}(P_{\mathscr{M}} f_1, f_2) &= (g_1, g_2+h_2) = (g_1,g_2)\\ &= (g_1+h_1, g_2) = (f_1, P_{\mathscr{M}} f_2)\end{aligned}$$

知 P_M 是自伴的. 又诸 $g\in\mathscr{M}$ 有正交分解 $g+0$, 故 $P_{\mathscr{M}} g=g$, 从而 $\operatorname{ran}P_{\mathscr{M}}=\mathscr{M}$ 且

$$P_{\mathscr{M}}(P_{\mathscr{M}} f) = P_{\mathscr{M}} f,\quad f\in\mathscr{H}.$$

因此 $P_{\mathscr{M}}$ 是幂等的. 总之, $P_{\mathscr{M}}$ 是值域为 $\mathscr{M}$ 的一个投影算子.

现在设 P 是一个投影算子. 命 $\mathscr{M} = \text{ran}P$, 若其中序列 $\{Pf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛至 g, 则

$$g = \lim_{n\to\infty} Pf_n = \lim_{n\to\infty} P^2 f_n = P[\lim_{n\to\infty} Pf_n] = Pg.$$

因此 g 属于 $\mathscr{M}$, 而 $\mathscr{M}$ 便是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间. 若 h 属于 $\mathscr{M}^\perp$, 则 P^2h 属于 $\mathscr{M}$ 而

$$\|Ph\|^2 = (Ph, Ph) = (h, P^2h) = 0,$$

因此 $Ph = 0$. 诸 $f \in \mathscr{H}$ 都有分解 $Pg + h$ 使 h 属于 $\mathscr{M}^\perp$, 因此

$$P_{\mathscr{M}} f = Pg = P^2 g + Ph = Pf.$$

可见, $P = P_{\mathscr{M}}$. ■

闭线性子空间的许多几何性质可用其上投影算子述语来表达.

4.19 命题　设 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^n$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的闭子空间而 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 是其对应的投影算子, 则 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$ 当且仅当 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^n$ 相互正交且张成 $\mathscr{H}$, 即诸 $f \in \mathscr{H}$ 有唯一正交分解 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ 使每个 f_i 属于 $\mathscr{M}_i$.

证明　若 $P_1+P_2+\cdots+P_n = I$, 则诸 $f \in \mathscr{H}$ 有唯一分解 $P_1f+P_2f+\cdots+P_nf$. 因此 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^n$ 张成 $\mathscr{H}$. 反之, 若 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^n$ 张成 $\mathscr{H}$ 且 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ 是投影算子, 则它必是恒等算子. 因此问题简化为 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ 是投影算子当且仅当 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^n$ 相互正交.

为说明这可化为两个子空间情形并完成证明, 下面证明两个结论.

设 P 和 Q 是 $\mathscr{H}$ 上两个正算子. 若 P 和 $P+Q$ 都是投影算子, 则 PQ 和 QP 都为零算子, Q 是投影算子且其值域与 P 的值域正交. 为此, 将等式

$$P(P+Q)^2P = P(P+Q)P$$

展开得 $PQP + PQ^2P = 0$. 诸 f 便使

$$\begin{aligned}&(QPf, Pf) + (QPf, QPf)\\ =&(PQPf + PQ^2Pf, f) = 0.\end{aligned}$$

可见 $QP = 0$, 取共轭得 $PQ = 0$. 现在, 幂等式子 $Q^2 = Q$ 源自下式

$$(P+Q)^2 = P + Q.$$

为证 Q 和 P 有正交值域, 任取 $\mathscr{H}$ 中向量 f 和 g, 则

$$(Pf, Qg) = (QPf, g) = 0.$$

设投影算子 P 和 Q 有正交值域, 则 $P+Q$ 是投影算子. 事实上,

$$(QPf,g)=(Pf,Qg)=0.$$

这样 $QP=0$, 类似得 $PQ=0$. 于是

$$\begin{aligned}(P+Q)^2 =&P^2+PQ+QP+Q^2\\ =&P+Q,\end{aligned}$$

从而 $P+Q$ 是幂等的, 显然它也是自伴的. ■

上述证明显示有限个值域相互正交的投影算子之和也是投影算子.

下面我们考虑一些正规算子, 它们不同于有限维 Hilbert 空间上可对角化的矩阵.

4.20 例 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是一个概率空间. 对于 $L^\infty(\mu)$ 中诸函数 φ, 定义 $L^2(\mu)$ 上一个映射 $M_\varphi: f\mapsto \varphi f$, 这里 φf 表示点态乘积. 记 $\mathfrak{M}=\{M_\varphi:\varphi\in L^\infty(\mu)\}$. 显然, M_φ 是线性的, 其有界性源自以下不等式

$$\begin{aligned}\|M_\varphi f\|_2 =& \left(\int_X |\varphi f|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant& \left(\int_X \|\varphi\|_\infty |f|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_\infty\|f\|_2.\end{aligned}$$

由此还得 $\|M_\varphi\|\leqslant\|\varphi\|_\infty$. 进而, 命

$$E_n=\{x\in X:|\varphi(x)|\geqslant \|\varphi\|_\infty-1/n\},$$

则 $\mu(E_n)>0$ 且

$$\begin{aligned}\|M_\varphi I_{E_n}\|_2 =& \left(\int_X |\varphi I_{E_n}|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\ \geqslant& \left(\int_X \left(\|\varphi\|_\infty-\frac{1}{n}\right)^2 |I_{E_n}|^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\ \geqslant& \left(\|\varphi\|_\infty-\frac{1}{n}\right)\|I_{E_n}\|_2,\end{aligned}$$

从而 $\|M_\varphi\|\geqslant\|\varphi\|_\infty$, 可见 $\|M_\varphi\|=\|\varphi\|_\infty$. 又 $L^2(\mu)$ 中函数 f 和 g 满足

$$(M_\varphi f,g)=\int_X \varphi f\overline{g}\mathrm{d}\mu=\int_X f\overline{(\overline{\varphi}g)}\mathrm{d}\mu=(f,M_{\overline{\varphi}}g),$$

因此 $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$. 从 $L^\infty(\mu)$ 到 $\mathfrak{M}$ 的映射 $\Psi : \varphi \mapsto M_\varphi$ 显然是线性的和可乘的. 于是 $\Psi : L^\infty(\mu) \to \mathfrak{M}$ 是到上的等距 *- 同构, 其中述语 *- 用来表示 $L^\infty(\mu)$ 中函数的共轭被 Ψ 转换为 $\mathfrak{L}(L^2(\mu))$ 中算子的共轭.

因为代数 $L^\infty(\mu)$ 是交换的, 算子 M_φ 便与 M_φ^* 交换, 从而是正规算子. 而算子 M_φ 是自伴的当且仅当 $M_\varphi = M_\varphi^*$ 当且仅当 $\varphi = \overline{\varphi}$, 即 φ(几乎处处) 取实值. 注意到 $M_\varphi^2 = M_{\varphi^2}$, 算子 M_φ 是幂等的当且仅当 $\varphi^2 = \varphi$, 即 φ(几乎处处) 与一个特征函数相等. 于是, $\mathfrak{M}$ 中自伴算子恰是实值 φ 对应的乘法算子 M_φ, 而 $\mathfrak{M}$ 中投影算子恰是特征函数 φ 对应的乘法算子 M_φ.

现在考虑算子 M_φ 的谱. 任取复数 λ, 则 $M_\varphi - \lambda I = M_{(\varphi-\lambda)}$. 若 $\varphi - \lambda$ 在 $L^\infty(\mu)$ 中可逆, 则 $M_\varphi - \lambda I$ 在 $\mathfrak{L}(L^2(\mu))$ 中可逆且有逆算子 $M_{(\varphi-\lambda)^{-1}}$. 因此 $\sigma(M_\varphi) \subseteq \mathscr{R}(\varphi)$. 为得反向包含关系, 需要证明 $M_\varphi - \lambda I$ 可逆时, 其逆算子属于 $\mathfrak{M}$. 这至少可用两个不同方法证明, 每个方法都反映了 $\mathfrak{M}$ 所具有的一个重要性质.

4.21 定义　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 称 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个子代数 $\mathfrak{M}$ 为极大交换子代数是指 $\mathfrak{M}$ 交换且不真含于 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的任何交换子代数.

4.22 命题　子代数 $\mathfrak{M} = \{M_\varphi : \varphi \in L^\infty(\mu)\}$ 是极大交换的.

证明　任取 $L^2(\mu)$ 上与 $\mathfrak{M}$ 中诸算子交换的算子 T, 命 $\psi = T1$, 它属于 $L^2(\mu)$ 且诸 $\varphi \in L^\infty(\mu)$ 满足下式

$$T\varphi = TM_\varphi 1 = M_\varphi T1 = \psi\varphi.$$

为证 ψ 本质有界, 命 $E_n = \{x \in X : |\psi(x)| \geqslant \|T\| + 1/n\}$, 则

$$\begin{aligned}\|T\|\,\|I_{E_n}\|_2 \geqslant \|TI_{E_n}\|_2 = \|\psi I_{E_n}\|_2 &= \left(\int_X |\psi I_{E_n}|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\left(\int_X I_{E_n}^2 \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\|I_{E_n}\|_2.\end{aligned}$$

因此 $\|I_{E_n}\| = 0$, 而 $\{x \in X : |\psi(x)| > \|T\|\}$ 便是零测集. 于是 ψ 是一个本质有界函数使 M_ψ 与 T 在 $L^2(\mu)$ 的稠密集 $L^\infty(\mu)$ 上相等, 因此 T 等于 M_ψ 而属于 $\mathfrak{M}$, 后者便是 $\mathfrak{L}(L^2(\mu))$ 的极大交换代数. ■

4.23 命题　设 $\mathfrak{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个极大交换子代数, 则 $\mathfrak{A}$ 中诸算子 T 满足 $\sigma(T) = \sigma_{\mathfrak{A}}(T)$.

证明　显然 $\sigma(T) \subseteq \sigma_{\mathfrak{A}}(T)$. 若 λ 不属于 $\sigma(T)$, 则 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在且与 $\mathfrak{A}$ 交换. 由 $\mathfrak{A}$ 的极大交换性知 $(T-\lambda I)^{-1}$ 属于 $\mathfrak{A}$, 故 λ 不属于 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T)$. 因此 $\sigma(T) = \sigma_{\mathfrak{A}}(T)$. ■

4.24 推论　对于 $\varphi \in L^\infty(\mu)$, 有 $\sigma(M_\varphi) = \mathscr{R}(\varphi)$.

证明　因 $\mathfrak{M} = \{M_\varphi : \varphi \in L^\infty(\mu)\}$ 是 $L^2(\mu)$ 上一个极大交换子代数, 故由上述结论得 $\sigma_{\mathfrak{M}}(M_\varphi) = \sigma(M_\varphi)$. 由 $\mathfrak{M}$ 和 $L^\infty(\mu)$ 同构知 $\sigma_{\mathfrak{M}}(M_\varphi) = \sigma_{L^\infty(\mu)}(\varphi)$, 再由引理 2.63 知 $\sigma_{L^\infty(\mu)}(\varphi) = \mathscr{R}(\varphi)$. ■

下面举例说明 $\mathscr{H}$ 上存在子代数 $\mathfrak{A}$ 且此代数中存在算子 T 使 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T) \neq \sigma(T)$, 之后对以上问题给出其他处理方法.

4.25 例　设 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{Z}$ 上满足 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$ 的复值函数 f 构成的 Hilbert 空间. 规定 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上所谓双侧移位U 使对于 $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 有 $(Uf)(n) = f(n-1)$. 显然 U 是线性的. 下述等式

$$\|Uf\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(Uf)(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-1)|^2 = \|f\|_2^2$$

表明 U 保持范数, 从而有界. 定义 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上算子 A 使 $(Af)(n) = f(n+1)$, 我们有

$$\begin{aligned}(Uf, g) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Uf)(n)\overline{g(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-1)\overline{g(n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n+1)} = (f, Ag),\end{aligned}$$

从而 $A = U^*$. 直接算得 $UU^* = U^*U = I$, 即 $U^{-1} = U^*$, 从而 U 是个酉算子.

由命题 2.28 知 $\sigma(U) \subset \overline{\mathbb{D}}$ 及 $\sigma(U^{-1}) = \sigma(U^*) \subset \overline{\mathbb{D}}$. 当复数 λ 使 $0 < |\lambda| < 1$ 时,

$$(U - \lambda I)U^{-1} = \lambda(\frac{1}{\lambda}I - U^{-1}).$$

既然 $|1/\lambda| > 1$, 算子 $I/\lambda - U^{-1}$ 可逆, 从而 $U - \lambda I$ 也可逆. 因此 $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$.

任给 $\theta \in [0, 2\pi]$, 作 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $|k| \leqslant n$ 时, $f_n(k) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$; 而 $|k| > n$ 时, $f_n(k) = 0$. 直接计算可知 f_n 是单位向量且 $\lim\limits_{n\to\infty}(Uf_n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f_n) = 0$. 从而 $U - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}I$ 不是下有界的, 于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 属于 $\sigma(U)$. 这得 $\sigma(U) = \mathbb{T}$.

以 $\mathfrak{A}_+$ 记 $\mathfrak{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ 的包含 I 和 U 的最小闭子代数, 则 $\mathfrak{A}_+$ 是 U 的多项式全体依算子范数的闭包, 即

$$\mathfrak{A}_+ = \operatorname{clos}\left\{\sum_{n=0}^{N} \alpha_n U^n : \alpha_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

以 $\mathscr{M}$ 记 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的闭子空间 $\{f \in \ell^2(\mathbb{Z}) : f(k) = 0, k < 0\}$, 则 $U\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$, 从而多项式 p 都使 $p(U)\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$. 任取 $T \in \mathfrak{A}_+$, 要证 $T\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$. 为此取列多项式列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(U) = T$. 对于 $f \in \mathscr{M}$, 有 $Tf = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(U)f$, 因此 Tf 属于 $\mathscr{M}$.

现证 $U^{-1}\mathscr{M} \not\subseteq \mathscr{M}$. 设 $e_0 \in \mathscr{M}$ 在 0 处等于 1 而在其余位置等于 0, 则

$$(U^{-1}e_0)(-1) = (U^*e_0)(-1) = 1 \neq 0.$$

这样 $U^{-1}e_0$ 不属于 $\mathscr{M}$. 于是 U^{-1} 不属于 $\mathfrak{A}_+$, 即 0 属于 $\sigma_{\mathfrak{A}_+}U$, 而 $\sigma_{\mathfrak{A}_+}(U) \neq \sigma(U)$.

可以证明代数 $\mathfrak{A}_+$ 与 2.50 节中定义的圆盘代数有等距同构使 U 对应于 χ_1, 因此 $\sigma_{\mathfrak{A}_+}(U) = \overline{\mathbb{D}}$. 我们后面还会回到这个问题上来.

代数 $\mathfrak{A}_+$ 含于更大交换代数 $\{M_\varphi : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\}$, 因此 $\mathfrak{A}_+$ 不是极大交换的. 同样重要的是 $\mathfrak{A}_+$ 不是 $\mathfrak{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ 的自伴子代数, 因为我们很快会证明自伴子代数具有保谱性质. 下面我们考虑自伴代数的抽象概念.

4.26 定义　设 $\mathfrak{A}$ 是一个 Banach 代数, 其上映射 $T \mapsto T^*$ 是对合运算是指 $\mathfrak{A}$ 中任意元素 S 和 T 及任意复数 α 和 β 满足以下条件:

(i) $T^{**} = T$;

(ii) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$;

(iii) $(ST)^* = T^* S^*$.

若进而 T 都满足等式 $\|T^*T\| = \|T\|^2$, 则称 $\mathfrak{A}$ 为 C*- 代数.

对于任何 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$, 由命题 4.4 知 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的自伴闭子代数都是 C*- 代数. 事实上, 可以证明每个 C*- 代数都等距同构于一个这样的代数 (见习题 5.26).

基于共轭运算定义的各类算子概念都可以扩展到 C*- 代数上去; 比如, C*- 代数中一个元素 T 为自伴元是指 $T^* = T$, 它为正规元是指 $TT^* = T^*T$, 它为酉元是指 $T^*T = TT^* = I$.

我们现在给出命题 4.15 的另一证明, 该命题的证明对于 C*- 代数也成立. 我们前面的证明本质上用到了我们是在处理 Hilbert 空间上算子这个事实.

4.27 定理　在 C*- 代数中, 自伴元的谱都是实的.

证明　首先观察到 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 中任意元素 T 都满足下式

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \, \|T\|,$$

这蕴涵 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. 结合 $T^{**} = T$ 知 $\|T^*\| = \|T\|$, 故 C*- 代数上对合运算是等距的.

现设 H 是 $\mathfrak{A}$ 中一个自伴元, 命 $U = \exp(\mathrm{i}H)$. 由指数函数的定义可得

$$U^* = (\exp(\mathrm{i}H))^* = \exp(-\mathrm{i}H^*) = \exp(-\mathrm{i}H).$$

现在可说明 U 是酉元 (即它有逆元 U^*). 为此用引理 2.12 算得

$$\begin{aligned} UU^* &= \exp(\mathrm{i}H)\exp(-\mathrm{i}H) = \exp(\mathrm{i}H - \mathrm{i}H) \\ &= I = \exp(-\mathrm{i}H)\exp(\mathrm{i}H) = U^*U. \end{aligned}$$

现由 $1 = \|I\| = \|U^*U\| = \|U\|^2$ 可得 $\|U\| = \|U^*\| = 1$.

由命题 2.28 知 $\sigma(U) \subset \overline{\mathbb{D}}$. 当复数 λ 使 $|\lambda| < 1$ 时, $U - \lambda I$ 等于 $U(I - \lambda U^*)$, 它可逆. 因此 $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$. 由谱映射定理得 $\sigma(U) = \exp(\mathrm{i}\sigma(H))$, 于是 $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$. ■

4.28 定理 设 C*- 代数 $\mathfrak{B}$ 与其某个 C*- 子代数 $\mathfrak{A}$ 有相同单位元, 则诸 $T \in \mathfrak{A}$ 满足等式 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T) = \sigma_{\mathfrak{B}}(T)$.

证明 因 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T) \supset \sigma_{\mathfrak{B}}(T)$, 故只需证明 $T-\lambda I$ 于 $\mathfrak{B}$ 可逆时的逆元 $(T-\lambda I)^{-1}$ 属于 $\mathfrak{A}$. 不失一般性, 我们可设 $\lambda = 0$, 这样 T 在 $\mathfrak{B}$ 中可逆, 而 $\mathfrak{A}$ 中自伴元 T^*T 也在 $\mathfrak{B}$ 中可逆. 由上述定理知 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T^*T)$ 是实的, 再由推论 2.55 得 $\sigma_{\mathfrak{A}}(T^*T) = \sigma_{\mathfrak{B}}(T^*T)$. 这样 T^*T 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆. 由

$$T^{-1} = (T^{-1}(T^*)^{-1})T^* = (T^*T)^{-1}T^*$$

知 T^{-1} 属于 $\mathfrak{A}$. ■

现在到了我们建立正规算子谱定理的时候了. 我们还要用它建立连续函数的"函数演算" 并证明正规算子的许多基本结果.

我们的方法基于交换 C*- 代数的如下特征.

4.29 定理 (Gelfand-Naimark) 设 $\mathfrak{A}$ 是一个交换 C*- 代数而 M 是其极大理想空间, 则 $\mathfrak{A}$ 的 Gelfand 变换是到 $C(M)$ 上的等距 *- 同构.

证明 以 Γ 记 Gelfand 变换. 对于 $\mathfrak{A}$ 中诸元 T, 我们必须证明 $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T^*)$ 且 $\|\Gamma(T)\|_\infty = \|T\|$, 结合 Stone-Weierstrass 定理知 Γ 是到上的.

作自伴元 $H = (T+T^*)/2$ 和 $K = (T-T^*)/2\mathrm{i}$, 则 $T = H + \mathrm{i}K$ 且 $T^* = H - \mathrm{i}K$. 由定理 4.27 知 $\sigma(H)$ 和 $\sigma(K)$ 都含于 $\mathbb{R}$, 由推论 2.36 知 $\Gamma(H)$ 和 $\Gamma(K)$ 都是实函数. 因此

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(T)} = \overline{\Gamma(H) + \mathrm{i}\Gamma(K)} &= \Gamma(H) - \mathrm{i}\Gamma(K) \\ &= \Gamma(H - \mathrm{i}K) = \Gamma(T^*)\end{aligned}$$

从而 Γ 是 *- 映射. 据定义 4.26 和推论 2.36 及定理 2.38 和 T^*T 自伴的事实, 得

$$\begin{aligned}\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|(T^*T)^{2k}\|^{\frac{1}{2k}} &= \lim_{k\to\infty} \|(T^*T)^{2k}\|^{\frac{1}{2k}} \\ &= \|\Gamma(T^*T)\|_\infty = \|\Gamma(T^*)\Gamma(T)\|_\infty \\ &= \|\,|\Gamma(T)|^2\|_\infty = \|\Gamma(T)\|_\infty^2.\end{aligned}$$

从而 Γ 是等距的, 因此是到 $C(M)$ 上的等距 *- 同构. ■

交换 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 中诸元 T 自然与其共轭交换, 从而是正规元. 另一方面, 任一正规元都可生成一个交换 C*- 代数.

4.30 定理 (谱定理) Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上每个正规算子 T 生成的 C*- 代数 $\mathfrak{C}_T$ 都是交换的, 其极大理想空间与 $\sigma(T)$ 同胚. 因此 $\mathfrak{C}_T$ 的 Gelfand 变换是到 $C(\sigma(T))$ 上的一个等距 *- 同构.

证明　算子 T 和 T^* 交换, 依它们为变量的多项式全体是含于 $\mathfrak{C}_T$ 的交换子代数, 容易验证该子代数的闭包是 $\mathfrak{C}_T$, 后者便交换. 要证 $\mathfrak{C}_T$ 的极大理想空间 M 同胚于 $\sigma(T)$, 从 M 至 $\sigma(T)$ 定义映射 $\psi : \varphi \mapsto \Gamma(T)(\varphi)$. 由推论 2.36 知 $\Gamma(T)$ 的值域等于 $\sigma(T)$, 从而 ψ 是合理定义且到上的. 为证 ψ 是一对一的, 设 M 中有元素 φ_1 和 φ_2 使 $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$, 即 $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi_1(T^*) &= \Gamma(T^*)(\varphi_1) = \overline{\Gamma(T)(\varphi_1)}\\ &= \overline{\Gamma(T)(\varphi_2)} = \Gamma(T^*)(\varphi_2) = \varphi_2(T^*),\end{aligned}$$

从而 φ_1 和 φ_2 在以 T 和 T^* 为变量的所有多项式上相等. 这些多项式全体在 $\mathfrak{C}_T$ 中稠密, 因此 $\varphi_1 = \varphi_2$. 最后, 若 M 中网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 收敛至 φ, 则

$$\lim_{\alpha\in A} \psi(\varphi_\alpha) = \lim_{\alpha\in A} \Gamma(T)(\varphi_\alpha) = \Gamma(T)(\varphi) = \psi(\varphi),$$

于是 ψ 连续. 因为 M 和 $\sigma(T)$ 都是紧 Hausdorff 空间, 所以 ψ 是一个同胚. 证毕. ■

4.31 函数演算　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 对于 T 的基本函数演算可以定义如下：对于多项式 $p(z) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z^n$, 命 $p(T) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n T^n$. 映射 $p \mapsto p(T)$ 是多项式代数到算子代数的一个同态. 若 $\mathscr{H}$ 是有限维的, 则我们可以将对于 T 的分析建立在这个函数演算基础上. 特别地, 这一同态的核 $\{p(z) : p(T) = 0\}$ 是多项式代数的一个非零主理想, 而该理想的生成元是 T 的极小多项式. 若 $\mathscr{H}$ 是无限维的, 则这种函数演算几乎得不出什么信息.

把这个同态扩张到更大函数代数上去 (见习题 2.18) 是算子理论中一个相当重要的课题.

在 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上正规算子情形, Gelfand 变换建立了 $C(\sigma(T))$ 与 $\mathfrak{C}_T$ 之间的一个等距 *- 同构. 对于任意 $\varphi \in C(\sigma(T))$, 我们定义 $\varphi(T) = \Gamma^{-1}\varphi$. 显然, 若 φ 是 z 的多项式, 则这一定义与前面的定义一致. 进一步, 若 $\mathscr{H}$ 上算子 A 与 T 和 T^* 都交换, 则 A 必与 $\mathfrak{C}_T$ 中诸算子交换, 从而与 $\varphi(T)$ 交换.

在本章的剩余部分, 我们将利用这种函数演算得到算子的一些性质并且将函数演算扩展到更大的函数类.

4.32 推论　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 则 T 是正的当且仅当其谱 $\sigma(T)$ 是非负实的; 而 T 是自伴的当且仅当其谱 $\sigma(T)$ 是实的.

证明　若 T 是正的, 由命题 4.15 知 $\sigma(T)$ 是非负的. 反之, 若 T 是正规的且 $\sigma(T)$ 是非负的, 则 Gelfand 变换 $\Gamma : \mathfrak{C}_T \to C(\sigma(T))$ 使 $\Gamma(T) \geqslant 0$. 因此 $\sigma(T)$ 上有个连续函数 φ 使 $\Gamma(T) = |\varphi|^2$. 于是

$$T = [\overline{\varphi}(T)][\varphi(T)] = \varphi(T)^*\varphi(T),$$

由命题 4.14 知 T 是正的.

若 T 是自伴的, 由命题 4.15 知 $\sigma(T)$ 是实的. 反之, 若 T 是正规的且 $\sigma(T)$ 是实的, 则由推论 2.36 知 $\psi = \Gamma(T)$ 是实值函数, 从而

$$T = \psi(T) = \overline{\psi}(T) = \psi(T)^* = T^*,$$

可见 T 是自伴的. ■

若不设 T 正规, 则上述推论不正确, 比如, 有个不自伴的算子, 其谱只含零点.

上述推论的第二部分对于 C*- 中正规元也对, 而第一部分则允许我们在 C*- 代数中这样定义正元: 它是正规的且其谱是非负实的.

我们现在证明正算子有唯一正平方根.

4.33 命题　设 P 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正算子, 则有 $\mathscr{H}$ 上唯一正算子 Q 使得 $Q^2 = P$. 进而, 与 P 交换的诸算子与 Q 交换.

证明　因 $\sigma(P)$ 是非负实的, 其上平方根函数$\sqrt{\ }$是连续的. 故 $\sqrt{P}$ 是 $\mathscr{H}$ 上合理定义的算子使 $\sigma(\sqrt{P}) = \sqrt{\sigma(P)}$, 由推论 4.32 知 $\sqrt{P}$ 是正算子. 据函数演算的定义知 $(\sqrt{P})^2 = P$. 据 4.31 节知与 P 交换的诸算子与 $\sqrt{P}$ 交换.

为证 $\sqrt{P}$ 的唯一性, 设 Q 是 $\mathscr{H}$ 上一个正算子使 $Q^2 = P$, 则

$$QP = QQ^2 = Q^2Q = PQ.$$

由 4.31 节中的说明知 $\sqrt{P}$ 和 Q 生成的 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 是交换的. 据命题 2.36 和定理 4.28, 在 $\mathfrak{A}$ 的 Gelfand 变换 Γ 下, $\Gamma(\sqrt{P})$ 和 $\Gamma(Q)$ 都是非负函数且

$$\Gamma(\sqrt{P})^2 = \Gamma(P) = \Gamma(Q)^2,$$

故 $\Gamma(\sqrt{P}) = \Gamma(Q)$. 因 Γ 是一对一的, $Q = \sqrt{P}$. ■

4.34 推论　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则它是正的当且仅当 $\mathscr{H}$ 上有个算子 S 使 $T = S^*S$.

证明　若 T 是正的, 命 $S = \sqrt{T}$ 即可. 若 $T = S^*S$, 由命题 4.14 知 T 是正的. ■

诸复数可以写成一个非负实数和一个幺模数的乘积形式. Euclid 空间 $\mathbb{C}^n$ 上线性变换的极形式保持了这一形式, 此处非负数换成了正算子, 幺模数换成了酉算子. 而无限维 Hilbert 空间上算子有类似的结论, 且在适当条件下表示还是唯一的. 在证明这一结果之前, 我们需要引入部分等距的概念.

4.35 定义　称 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子 V 是部分等距的是指与 V 的核正交的向量 f 都满足等式 $\|Vf\| = \|f\|$. 若 V 还有核 $\{0\}$, 则 V 是等距的. 部分等距的始空间是其核的正交补.

有限维 Hilbert 空间上的等距算子实际上都是酉算子. 然而, 这样一个结论对于无限维 Hilbert 空间上的等距不再成立. 为此我们考虑与双侧移位有关的一个重要例子.

4.36 例 作 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上算子 U_+ 使 $n>0$ 时 $(U_+f)(n)=f(n-1)$ 而 $(U_+f)(0)=0$. 这个算子称为单侧移位且简单计算可知 U_+ 是等距的. 规定 $e_0(0)=1$, 而 $n>0$ 时, $e_0(n)=0$. 如此定义的函数 e_0 与 U_+ 的值域正交, 故 U_+ 不是酉算子. 直接计算知诸 $f\in\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 满足等式 $U_+^*f(n)=f(n+1)$.

我们考虑 U_+ 的谱. 首先, 由 $\|U_+\|=1$ 得 $\sigma(U_+)\subseteq\overline{\mathbb{D}}$. 其次, 对于 $z\in\mathbb{D}$, 函数 $f_z:n\mapsto\overline{z}^n$ 属于 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 且 $U_+^*f_z=\overline{z}f_z$. 因此 z 属于 $\sigma(U_+)$, 从而 $\sigma(U_+)=\overline{\mathbb{D}}$.

以下结论表明, 是否存在部分等距的算子以给定的两个闭线性子空间为始空间和值域这个问题只与所给子空间的维数有关.

4.37 命题 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的两个闭线性子空间使 $\dim\mathscr{M}=\dim\mathscr{N}$, 则存在以 $\mathscr{M}$ 为始空间而 $\mathscr{N}$ 为值域的部分等距 V.

证明 各取 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 的规范正交基 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 他们有相同的下标集. 定义 $\mathscr{H}$ 上算子 V 如下: 将 $\mathscr{H}$ 中向量 g 写成 $h+\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha e_\alpha$ 使 $h\perp\mathscr{M}$, 命 $Vg=\sum\limits_{\alpha\in A}\lambda_\alpha f_\alpha$. 显然 $\ker V=\mathscr{M}^\perp$ 且诸 $g\in\mathscr{M}$ 满足 $\|Vg\|=\|g\|$. 从而是 V 以 $\mathscr{M}$ 为始空间而 $\mathscr{N}$ 为值域的部分等距. ■

我们下面给出部分等距的一个有用特征, 这使我们可以定义 C*- 代数中的部分等距.

4.38 命题 设 V 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则以下条件等价:

(1) V 是个部分等距;

(2) V^* 是个部分等距;

(3) VV^* 是个投影算子;

(4) V^*V 是个投影算子.

在以上条件下, VV^* 是到 V 的值域上的投影算子, 而 V^*V 是到 V 的始空间上的投影算子.

证明 由于部分等距 V 是压缩的, 对于任意 $f\in\mathscr{H}$, 我们有

$$\begin{aligned}((I-V^*V)f,f)&=(f,f)-(V^*Vf,f)\\&=\|f\|^2-\|Vf\|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $I-V^*V$ 是个正算子. 若 f 与 $\ker V$ 正交, 则 $\|Vf\|=\|f\|$, 因此

$$\|(I-V^*V)^{\frac{1}{2}}f\|^2=((I-V^*V)f,f)=0,$$

可见, $(I-V^*V)f=0$, 即 $V^*Vf=f$. 于是 V^*V 是到 V 的始空间上的投影算子.

反之, 若 V^*V 是投影算子, 且 f 与 $\ker(V^*V)$ 正交, 则 $V^*Vf = f$. 于是

$$\|Vf\|^2 = (V^*Vf, f) = (f, f) = \|f\|^2.$$

因此 V 在 $\ker(V^*V)^\perp$ 上保持范数. 又当 $V^*Vf = 0$ 时,

$$0 = (V^*Vf, f) = \|Vf\|^2.$$

故 $\ker(V^*V) = \ker V$, 而 V 是部分等距的. 于是 (1) 和 (4) 等价. 交换 V 和 V^* 的地位知 (2) 和 (3) 等价.

进而, 若 V^*V 是投影算子, 则 $V(V^*V) = V$, 从而

$$(VV^*)^2 = V(V^*V)V^* = VV^*.$$

因此 VV^* 也是投影算子. ■

现在我们可得 Hilbert 空间上算子的极分解如下.

4.39 定理　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则有一个正算子 P 和一个部分等距 V 使 $T = VP$. 进而, 当 $\ker V = \ker P$ 时, P 和 V 是唯一的.

证明　命 $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, 则 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 使

$$\begin{aligned}\|Pf\|^2 &= (Pf, Pf) = (P^2f, f) \\ &= (T^*Tf, f) = \|Tf\|^2.\end{aligned}$$

这表明由等式 $\tilde{V}Pf = Tf$ 所得映射 $\tilde{V} : \mathrm{ran}P \to H$ 是合理定义的等距, 它因而能扩张成 $\mathrm{clos}[\mathrm{ran}P]$ 到 $\mathscr{H}$ 的唯一等距, 进而还可扩张成 H 上算子 V 使其在 $[\mathrm{ran}P]^\perp$ 上取零值. 如此所得的扩张 V 是部分等距的且满足等式 $T = VP$, 由命题 4.6 得

$$\ker V = [\mathrm{ran}P]^\perp = \ker P.$$

下面考虑唯一性. 设 W 是部分等距的而 Q 是正算子使 $\ker W = \ker Q$ 且 $T = WQ$. 由命题 4.38 和 4.6 知 W^*W 是到 $[\ker W]^\perp = \mathrm{clos}[\mathrm{ran}Q]$ 上的投影算子, 从而

$$P^2 = T^*T = QW^*WQ = Q^2.$$

由命题 4.33, 平方根是唯一的, 我们得到 $P = Q$ 且 $WP = VP$. 因此 W 和 V 在 $\mathrm{ran}P$ 上的限制相等. 又

$$[\mathrm{ran}P]^\perp = \ker P = \ker W = \ker V,$$

因此 W 和 V 在 $[\mathrm{ran}P]^\perp$ 上的也限制相等. 可见, $V = W$. ■

尽管这个正算子 P 含于 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的每个包含 T 的自伴闭子代数, 但类似结论对于部分等距 V 却不必成立. 考察例子, $T = M_\varphi M_\psi \in \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{T}))$, 其中 φ 是 $\mathbb{T}$ 上非负连续函数, 而 ψ 是 $\mathbb{T}$ 上不连续的幺模函数, 但可要求他们的乘积 $\varphi\psi$ 连续.

在许多情形, 改变极分解中因子的次序会很有用.

4.40 推论　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则有一个正算子 Q 和一个部分等距 W 使 $T = QW$. 进而当 $\operatorname{ran}W = [\ker Q]^\perp$ 时, 分解是唯一的.

证明　由上述定理, 我们得到一个部分等距 V 和一个正算子 P 使得 $T^* = VP$ 且 $\ker P = \ker V$. 取共轭得 $T = PV^*$, 命 $W = V^*$ 和 $Q = P$ 即可. 另外, 注意到 $\operatorname{ran}W = [\ker Q]^\perp$ 当且仅当

$$\ker V = \ker W^* = [\operatorname{ran}W]^\perp = [\ker Q]^{\perp\perp} = \ker P,$$

从而唯一性也源自定理 4.39. ■

若 T 是有限维 Hilbert 空间上正规算子, 同一个本征值对应的本征向量张成的线性子空间约化这个算子. 这些本征子空间可用来将 T 化为对角形式. 若有限维空间上算子 T 不必正规, 则要考虑的适当空间是由 T 的同一个本征值对应的广义本征向量张成的. 这些广义特征空间不必约化 T, 但仍是 T 的不变子空间.

尽管无限维 Hilbert 空间上算子没有类似结构理论, 不变子空间概念和约化子空间概念仍然很重要.

4.41 定义　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 上算子 T 的一个不变子空间是指 $T\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$, 它是 T 的一个约化子空间是指还有 $T(\mathscr{M}^\perp) \subseteq \mathscr{M}^\perp$.

我们将从以下基本事实开始.

4.42 命题　设 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子, $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间而 $P_\mathscr{M}$ 是到其上的投影算子, 则 $\mathscr{M}$ 是 T 的一个不变子空间当且仅当 $P_\mathscr{M}TP_\mathscr{M} = TP_\mathscr{M}$ 当且仅当 $\mathscr{M}^\perp$ 是 T^* 的一个不变子空间. 进而, $\mathscr{M}$ 是 T 的一个约化子空间当且仅当 $P_\mathscr{M}T = TP_\mathscr{M}$ 当且仅当 $\mathscr{M}$ 是 T 和 T^* 的一个公共不变子空间.

证明　若 $\mathscr{M}$ 是 T 的一个不变子空间, 则 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 都使 $TP_\mathscr{M}f$ 属于 $\mathscr{M}$, 因此 $P_\mathscr{M}TP_\mathscr{M}f = TP_\mathscr{M}f$, 故 $P_\mathscr{M}TP_\mathscr{M} = TP_\mathscr{M}$. 反之, 若 $P_\mathscr{M}TP_\mathscr{M} = TP_\mathscr{M}$, 则诸 $f \in \mathscr{M}$ 使

$$Tf = TP_\mathscr{M}f = P_\mathscr{M}TP_\mathscr{M}f = P_\mathscr{M}Tf,$$

于是 Tf 属于 $\mathscr{M}$. 从而 $T\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$, 即 $\mathscr{M}$ 是 T 的不变子空间. 进而, $I - P_\mathscr{M}$ 是到 $\mathscr{M}^\perp$ 上投影算子且

$$T^*(I - P_\mathscr{M}) = (I - P_\mathscr{M})T^*(I - P_\mathscr{M})$$

等价于 $P_\mathscr{M}T^* = P_\mathscr{M}T^*P_\mathscr{M}$, 因此 $\mathscr{M}^\perp$ 是 T^* 的不变子空间当且仅当 $\mathscr{M}$ 是 T 的不

变子空间. 最后, 当 $\mathscr{M}$ 约化 T 时, 由前面结论得

$$P_{\mathscr{M}}T = P_{\mathscr{M}}TP_{\mathscr{M}} = TP_{\mathscr{M}}.$$

证毕. ■

4.43 在本章的剩下部分我们将把 4.31 节里所得谱上连续函数的函数演算扩展到一个更大函数代数上去. 这个更大函数代数与谱上有界 Borel 函数代数有关.

在开始之前, 我们对于函数演算的作用以及可能对扩展到更大函数代数上去感兴趣的原因作出一些说明. 我们将略去这些讨论的某些细节.

设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 其谱 $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$ 有限. 以 $\varphi \mapsto \varphi(T)$ 记 $\varphi \in C(\sigma(T))$ 的函数演算, 这是 $C(\sigma(T))$ 到 $\mathfrak{C}_T$ 上的 *- 同构. 若 λ_i 是个谱点, 则特征函数 $I_{\{\lambda_i\}}$ 在 $\sigma(T)$ 上连续, 因此属于 $C(\sigma(T))$. 记 $E_i = I_{\{\lambda_i\}}(T)$, 则 E_i 是个投影算子且 $E_1 + E_2 + \cdots + E_N = I$. 以 $\mathscr{M}_i$ 记 E_i 的值域, 则 $\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^N$ 相互正交, 它们张成空间 $\mathscr{H}$, 且由命题 4. 42 知 $\mathscr{M}_i$ 约化 T. 又

$$T = z(T) = \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i I_{\{\lambda_i\}}\right](T) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i E_i,$$

我们看到 T 在 $\mathscr{M}_i$ 上的作用就是由 λ_i 引导的数乘. 于是空间 $\mathscr{H}$ 分解为有限个线性子空间的正交和使 T 在这其中每个子空间上的作用是个数乘. 可见, 在 T 的谱有限时, 函数演算使我们将 T 对角化了.

若 T 的谱不是离散的, 但是完全不连通的, 则稍微修改前面的方法可将 $\mathscr{H}$ 分解成 T 的有限个约化子空间的正交和, 使 T 在每个约化子空间上的作用 (依范数意义) 近似于一个数乘. 因此在这种情况下, T 可被对角算子逼近.

若 T 的谱是连通的, 则 $C(\sigma(T))$ 不包含非平凡的特征函数而上述这种逼近便无效. 因此, 我们要将函数演算扩展到由特征函数生成的函数代数上去. 我们考虑用 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的更大交换自伴子代数的 Gelfand 变换来达到目的. 这个代数将通过对 $\mathfrak{C}_T$ 在一个较弱的拓扑下取闭包来得到, 因此下面我们开始考虑 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 上某些较弱的拓扑.

4.44 定义 设 $\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间而 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 上全体算子所成的代数, 其上弱算子拓扑是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 上线性泛函族 $\{T \mapsto (Tf, g) : f, g \in \mathscr{H}\}$ 的诱导拓扑; 其上强算子拓扑是从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 $\mathscr{H}$ 的线性算子族 $\{T \mapsto Tf : f \in \mathscr{H}\}$ 的诱导拓扑.

因此, $\mathscr{H}$ 上一个算子网 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依弱算子拓扑收敛至算子 T 是指 $\mathscr{H}$ 中所有向量 f 和 g 都使 $\lim\limits_{\alpha \in A}(T_\alpha f, g) = (Tf, g)$; 而 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依强算子拓扑收敛至 T 是指 $\mathscr{H}$ 中向量 f 都使 $\lim\limits_{\alpha \in A} T_\alpha f = Tf$. 显然弱算子拓扑弱于强算子拓扑, 后者又弱于一致拓扑 (即算子范数拓扑). 我们会在习题里给出这些拓扑相互不等的例子.

以下引理考虑了加法、数乘和共轭运算在弱算子拓扑下的连续性问题. 我们将在强算子拓扑下的相应问题留作习题.

4.45 引理　设 A 和 B 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 取弱算子拓扑后有以下连续函数:

(1) 从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})\times\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的映射 $\alpha:(S,T)\mapsto S+T$,

(2) 从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的映射 $\beta:T\mapsto AT$,

(3) 从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的映射 $\gamma:T\mapsto TB$,

(4) 从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的映射 $\delta:T\mapsto T^*$.

证明　直接计算. ■

扩充函数演算将基于 C*- 代数 $\mathfrak{C}_T$ 依弱算子拓扑的闭包.

4.46 定义　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 称 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的子集 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 W*- 代数是指 $\mathfrak{A}$ 为一个弱算子闭的自伴子代数.

读者应该注意每个 W*- 代数是 C*- 代数. 特别地, 一个 W*- 代数是由一些算子组成的共轭子代数. 还应注意, 当 Φ 是 $\mathscr{H}$ 上 W* - 代数 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathscr{H}$ 上 C*- 代数 $\mathfrak{B}$ 上的等距 *- 同构时, 我们不能断言 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的弱算子闭集. 我们不深入讨论这个问题, 有兴趣的读者可以参看 [27] 或 [28].

以下命题提供了获得 W*- 代数的一种方法.

4.47 命题　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个自伴子代数, 则 $\mathfrak{M}$ 依弱算子拓扑的闭包 $\mathfrak{A}$ 是 W*- 代数. 进而当 $\mathfrak{M}$ 交换时, $\mathfrak{A}$ 也交换.

证明　由引理 4.45 可知 $\mathfrak{M}$ 依弱算子拓扑的闭包 $\mathfrak{A}$ 是 W*- 代数. 现设 $\mathfrak{M}$ 交换, 其中网 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{T_\beta\}_{\beta\in B}$ 依弱算子拓扑分别收敛至 S 和 T. 对于 $\mathscr{H}$ 中向量 f 和 g 及 B 中元素 β, 我们有

$$\begin{aligned}(ST_\beta f,g)&=\lim_{\alpha\in A}(S_\alpha T_\beta f,g)=\lim_{\alpha\in A}(T_\beta S_\alpha f,g)\\&=\lim_{\alpha\in A}(S_\alpha f,T_\beta^*g)=(Sf,T_\beta^*g)=(T_\beta Sf,g).\end{aligned}$$

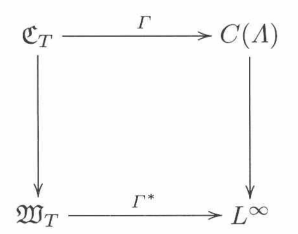
从而 $ST_\beta=T_\beta S$, 类似可得 $ST=TS$. 于是, 当 $\mathfrak{M}$ 交换时, $\mathfrak{A}$ 也交换. ■

4.48 推论　由 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子 T 生成的 W*- 代数 $\mathfrak{W}_T$ 是交换的. 若 Λ_T 是这个代数的极大理想空间, 则 Gelfand 变换是 $\mathfrak{W}_T$ 到 $C(\Lambda_T)$ 上的一个等距 *- 同构.

证明　由命题 4.47 和定理 4.29 立得结果. ■

4.49　设 T 是可分Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 其谱记为 Λ. 我们要说明 Λ 上有唯一 L^∞ 空间且有唯一等距 *- 同构 $\Gamma^*:\mathfrak{W}_T\to L^\infty$, 它扩展了 4.31 中函

数演算, 即伴有以下交换图



以上垂直箭头表示包含映射. 因此对于 T 的函数演算可以扩展到代数 $\mathfrak{W}_T$ 上去且 $\mathfrak{W}_T = \{\varphi(T) : \varphi \in L^\infty\}$.

考虑到以下说明性的例子, 我们准备一些测度论的预备知识. 设 Λ 是复平面的一个非空紧集, ν 是其上一个正 Borel 测度 (它必有限且正则), 支集为 Λ (这等价于 $C(\Lambda)$ 到 $L^\infty(\nu)$ 的包含映射是个等距同构). 回顾一下, $L^\infty(\nu)$ 中诸函数 φ 都对应 $L^2(\nu)$ 上一个乘法算子 $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$. 从 $L^\infty(\nu)$ 到 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 的映射 $\varphi \mapsto M_\varphi$ 是一个等距 *- 同态. 因此我们可以将 $L^\infty(\nu)$ 中元素与 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 中算子等同起来.

以下几个命题给出了测度 ν、函数代数 $C(\Lambda)$ 和 $L^\infty(\nu)$ 及算子代数 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 之间的几个重要关系, 其中第一个命题将 4.20 节的思路表达得既简洁又完整.

4.50 命题　设 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 是一个概率空间, 则 $L^\infty(\mu)$ 是 $\mathfrak{L}(L^2(\mu))$ 的一个极大交换 W*- 代数.

证明　基于 4.19 节的内容, 只有 $L^\infty(\mu)$ 在 $\mathfrak{L}(L^2(\mu))$ 中的弱闭性需要证明, 而这源自命题 4.47, 因其弱闭包是交换的因而等于 $L^\infty(\mu)$. ■

以下结论将 $L^\infty(\mu)$ 上的弱算子拓扑与熟知的拓扑联系起来了.

4.51 命题　设 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 是一个概率空间, 则 $L^\infty(\mu)$ 上弱算子拓扑和弱 * 拓扑相同.

证明　首先回顾个事实, 函数 f 属于 $L^1(\mu)$ 当且仅当 $L^2(\mu)$ 中有函数 g 和 h 使 $f = g\overline{h}$. 因此, $L^\infty(\mu)$ 中网 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱 * 收敛至 φ 当且仅当 $L^1(\mu)$ 中诸函数 f 使

$$\lim_{\alpha\in A} \int_X \varphi_\alpha f \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi f \mathrm{d}\mu$$

当且仅当 $L^2(\mu)$ 中诸函数 g 和 h 使

$$\lim_{\alpha\in A} (M_{\varphi_\alpha} g, h) = \lim_{\alpha\in A} \int_X \varphi_\alpha g\overline{h} \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi g\overline{h} \mathrm{d}\mu = (M_\varphi g, h)$$

当且仅当网 $\{M_{\varphi_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ 依弱算子拓扑收敛至 M_φ. ■

下一命题说明 $L^2(\nu)$ 上由 z 对应的乘法算子所生成的 W*- 代数就是 $L^\infty(\nu)$.

4.52 命题 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, μ 是其上一个正且正则的 Borel 测度, 则 $C(X)$ 的单位球在 $L^\infty(X)$ 的单位球中是弱 * 稠密的.

证明 鉴于使 $|\psi| \leqslant 1$ 的简单函数 ψ 全体在 $L^\infty(X)$ 的单位球中依范数稠密, 对于这样的 ψ 和任意正数 ε 以及 $L^1(\mu)$ 中任意有限个函数 $\{f_j\}_{j=1}^m$, 只需说明 $C(X)$ 有函数 φ 使 $\|\varphi\| \leqslant 1$ 且 $\sum\limits_{j=1}^m |\int\limits_X f_j(\varphi-\psi)\mathrm{d}\mu| < \varepsilon$.

为此设 $\psi = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}$ 使 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant 1$ 而 Borel 集 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 相互不交且 $X = \bigcup\limits_{i=1}^n E_i$. 取个正数 δ 使得当 Borel 集 F 满足 $\mu(F) < \delta$ 时, $\int\limits_F \sum\limits_{j=1}^m |f_j|\mathrm{d}\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 据 μ 的正则性得 E_i 中一个紧集 K_i 使 $\sum\limits_{i=1}^n \mu(E_i \setminus K_i) < \delta$. 据 Tietz 扩张定理得 X 上一个连续函数 φ 使 $|\varphi| \leqslant 1$ 且 $\varphi|_{K_i} = \alpha_i$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \left|\int_X f_j(\varphi-\psi)\mathrm{d}\mu\right| &\leqslant \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \int_{E_i\setminus K_i} |f_j||\psi-\varphi|\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \int_{E_i\setminus K_i} |f_j|\mathrm{d}\mu < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就完成了证明. ■

4.53 推论 若 X 是一个紧 Hausdorff 空间, μ 是其上一个正且正则的 Borel 测度, 则 $C(X)$ 在 $L^\infty(X)$ 中是弱 * 稠密的.

证明 显然. ■

我们现在考虑测度论方面的唯一性问题, 为此先回顾一个定义.

4.54 定义 可测空间 $(X,\mathscr{S})$ 上两个正测度 ν_1 和 ν_2 称为相互绝对连续的并记为 $\nu_1 \sim \nu_2$ 是指 ν_1 相对于 ν_2 绝对连续且 ν_2 也相对于 ν_1 绝对连续.

4.55 定理 设 ν_1 和 ν_2 是紧度量空间 (X,d) 上两个正 Borel 测度, 并且有等距 *- 同构 $\Phi: L^\infty(\nu_1) \to L^\infty(\nu_2)$ 使其在 $C(X)$ 上的限制是恒等映射, 则 $\nu_1 \sim \nu_2$, $L^\infty(\nu_1) = L^\infty(\nu_2)$ 且 Φ 是恒等映射.

证明 若 E 是 X 的一个 Borel 集, 则 $\Phi(I_E)$ 是幂等的从而是特征函数, 因此有 Borel 集 F 使 $\Phi(I_E) = I_F$. 于是 $\nu_1(E) = 0$ 当且仅当 $L^\infty(\nu_1)$ 中 $I_E = 0$ 当且仅当 $L^\infty(\nu_2)$ 中 $I_F = 0$ 当且仅 $\nu_2(F) = 0$.

一般地, 倘能证明 $E = F$ ν_2-a.e. (译注: 即特征函数 I_E 与 I_F 相对于 ν_2 几乎处处相等), 则 $\nu_1(E) = 0$ 当且仅当 $\nu_2(E) = 0$. 由此知 $\nu_1 \sim \nu_2$ 而且 $L^\infty(\nu_1) = L^\infty(\nu_2)$(因为 L^∞ 依某种意义是由零集决定的 —— 两个本质有界函数在 L^∞ 中相等指它们在某个零集外相等). 最后因 Φ 在特征函数上恒等, 而特征函数张成的线性子空间在 L^∞ 中稠密, 从而 Φ 是恒等映射.

因为 $(X\backslash F)\setminus(X\backslash E)$ 与 $E\setminus F$ 相等, 只需证明 $F\subseteq E$ ν_2-a.e.(译注: 即相对于 ν_2 几乎处处有 $I_F\leqslant I_E$). 这在 E 紧时成立, 在一般情形由 ν_1 和 ν_2 的正则性得 E 中紧集的递增序列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ ν_1-a.e. 且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ ν_2-a.e. 连续同态 Φ 和 Φ^{-1} 保持 *- 线性运算和乘积运算, 它们便保序和上确界运算. 这样

$$\begin{aligned}I_F\leqslant&\sup_{n\geqslant1}\Phi(I_{K_n})\leqslant\sup_{n\geqslant1}I_{K_n}\\=&I_{\bigcup\limits_{n\geqslant1}K_n}=I_E\ \nu_2\text{-a.e.}\end{aligned}$$

从而 $F\subseteq E$ ν_2-a.e. 因此可设 E 是闭集. 作 $C(X)$ 中序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1-n\cdot d(x,E), & d(x,E)\leqslant\dfrac{1}{n},\\[2mm]0, & d(x,E)\geqslant\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

这里 $d(x,E)=\inf\{d(x,y):y\in E\}$. 显然 $I_E\leqslant\varphi_n$ 且序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛至 I_E. 因 Φ 保序且在连续函数空间上是恒等映射, 我们得到 $I_F\leqslant\varphi_n$ ν_2-a.e. 最后得 $F\subseteq E$ ν_2-a.e. ■

在给出以下定义并证明一个基本引理后, 在算子具有循环向量的假设下, 我们就能得到所需的函数演算了.

4.56 定义　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 而 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个子代数. 称 $\mathscr{H}$ 中向量 f 为 $\mathfrak{A}$ 的循环向量是指 $\operatorname{clos}[\mathfrak{A}f]=\mathscr{H}$, 称它为 $\mathfrak{A}$ 的一个分离向量是指 $\mathfrak{A}$ 中使 $Af=0$ 的算子 A 只能为零算子.

4.57 引理　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的交换子代数 $\mathfrak{A}$ 的循环向量 f 也是其分离向量.

证明　若存在 $B\in\mathfrak{A}$ 使 $Bf=0$, 则诸 $A\in\mathfrak{A}$ 使

$$BAf=ABf=0.$$

故 $\mathfrak{A}f\subseteq\ker B$, 而 $B=0$. ■

若 $\mathscr{H}$ 上某个正规算子 T 具有循环向量 (但知这样的 $\mathscr{H}$ 必可分), 则以下定理给出了 $\mathfrak{W}_T$ 和 L^∞ 之间的一个空间同构 (译注: 所谓 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上一个代数 $\mathfrak{A}$ 到 Banach 空间 $\mathscr{Y}$ 上一个代数 $\mathfrak{B}$ 的映射 Φ 为某个等距同构 $V:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 装备的一个空间同构是指诸 $T\in\mathfrak{A}$ 使 $\Phi(T)=VTV^{-1}$).

4.58 定理　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 它生成的 C*- 代数 $\mathfrak{C}_T$ 有个循环向量, $\Lambda=\sigma(T)$, 则有支集为 Λ 的正 Borel 测度 ν 且 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\nu)$ 上存在等距同构 γ 使 $\mathfrak{W}_T$ 至 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 的映射 $\Gamma^*:A\mapsto\gamma A\gamma^{-1}$ 是等距 *- 同态的且有值域 $L^\infty(\nu)$, 其中函数 φ 等同于乘法算子 M_φ. 进而, Γ^* 扩张了 $\mathfrak{C}_T$ 至 $C(\Lambda)$ 的 Gelfand

变换 Γ. 最后, 若 ν_1 也是 Λ 上一个正 Borel 测度使 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty(\nu_1)$ 上的某个等距 *- 同态 Γ_1^* 扩张了 Gelfand 变换 Γ, 则 $\nu_1 \sim \nu$, $L^\infty(\nu) = L^\infty(\nu_1)$ 且 $\Gamma_1^* = \Gamma^*$.

证明 可设 f 是 $\mathfrak{C}_T$ 的单位循环向量, 则 $C(\Lambda)$ 上有正线性泛函 $\varphi \mapsto (\varphi(T)f, f)$ 且

$$|(\varphi(T)f, f)| \leqslant \|\varphi(T)\| \, \|f\|^2 = \|\varphi\|_\infty.$$

据 Riesz 表示定理得 Λ 上唯一正 Borel 测度 ν 使

$$\int_\Lambda \varphi \mathrm{d}\nu = (\varphi(T)f, f), \quad \varphi \in C(\Lambda).$$

若 ν 的支集不等于 Λ, 则有 Λ 的非空开集 V 使 $\nu(V) = 0$. 由 Urysohn 引理知存在非零 $\varphi \in C(\Lambda)$, 它在 V 之外为零. 于是

$$\begin{aligned}\|\varphi(T)f\|^2 &= (\varphi(T)f, \varphi(T)f) \\ &= (|\varphi|^2(T)f, f) = \int_V |\varphi|^2 \mathrm{d}\nu = 0,\end{aligned}$$

但由引理 4.57 知 f 是 $\mathfrak{C}_T$ 的分离向量, 矛盾. 所以 ν 的支集等于 Λ.

从 $\mathfrak{C}_T f$ 至 $L^2(\nu)$ 的映射 $\gamma_0 : \varphi(T)f \mapsto \varphi$ 是合理定义的等距, 这是因为

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_2^2 &= \int_\Lambda |\varphi|^2 \mathrm{d}\nu = (|\varphi|^2(T)f, f) \\ &= (\varphi(T)f, \varphi(T)f) = \|\varphi(T)f\|^2.\end{aligned}$$

因 $\mathfrak{C}_T f$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密且 $C(\Lambda)$ 在 $L^2(\nu)$ 中稠密, 故 γ_0 可唯一扩张成 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\nu)$ 上的等距同构 γ, 而从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 至 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 的映射 $\Gamma_0 : A \mapsto \gamma A \gamma^{-1}$ 便是等距 *- 同构. 任取 $C(\Lambda)$ 中元素 ψ 和 φ, 则

$$\begin{aligned}[\Gamma_0(\psi(T))]\varphi &= \gamma\psi(T)\gamma^{-1}\varphi = \gamma\psi(T)\varphi(T)f \\ &= \gamma[(\psi\varphi)(T)f] = \psi\varphi \\ &= M_\psi \varphi = \Gamma(\psi(T))\varphi.\end{aligned}$$

因 $C(\Lambda)$ 稠于 $L^2(\nu)$, 故 $\Gamma_0(\psi(T)) = M_\varphi = \Gamma(\psi(T))$.

因此 $\Gamma_0(\mathfrak{C}_T) = \{M_\varphi | \varphi \in C(\Lambda)\}$. 倘能证明 $\Gamma_0(\mathfrak{W}_T) = \{M_\varphi | \varphi \in L^\infty(\nu)\}$, 则可命 $\Gamma^* A = \Gamma_0 A$. 事实上, 由命题 4.47 和命题 4.50 及命题 4.51 和推论 4.53 知, 在 $\mathfrak{L}(L^2(\nu))$ 中 $\{M_\varphi | \varphi \in C(\Lambda)\}$ 依弱算子拓扑有闭包 $\{M_\varphi | \varphi \in L^\infty(\nu)\}$. 注意到由 γ 装备的同构 Γ_0 依弱算子拓扑是拓扑同构, 故

$$\begin{aligned}\Gamma_0(\mathfrak{W}_T) &= \Gamma_0(\text{weak oper clos}[\mathfrak{C}_T]) \\ &= \text{weak oper clos}[\Gamma_0(\mathfrak{C}_T)] \\ &= \{M_\varphi | \varphi \in L^\infty(\nu)\},\end{aligned}$$

上述符号 weak oper clos 意指弱算子闭包.

最后, 若 ν_1 是 Λ 上一个正 Borel 测度, Γ_1^* 是 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty(\nu_1)$ 上的一个等距 *- 同构且扩张了 Gelfand 变换, 则 $\Gamma^*\Gamma_1^{*-1}: L^\infty(\nu_1) \to L^\infty(\nu)$ 是到上等距 *- 同构且于 $C(\Lambda)$ 的限制是恒等映射. 由定理 4.55 知 $\nu_1 \sim \nu$, $L^\infty(\nu) = L^\infty(\nu_1)$, $\Gamma^*\Gamma_1^{*-1} = I$, 即 $\Gamma_1^* = \Gamma^*$. ■

4.59　上述结果给出了具有循环向量的正规算子的非常精确的信息. 不幸的是, 大多数正规算子没有循环向量. 我们考虑例子: $\mathscr{H} = L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$ 及 $T = M_g \oplus M_g$, 这里 $g(t) = t$. 容易验证 $\mathfrak{C}_T$ 没有循环向量, 这请读者作为习题. 因此定理 4.58 不适用于 T. 但是, 注意到

$$\mathfrak{C}_T = \{M_\varphi \oplus M_\varphi : \varphi \in C[0,1]\},$$
$$\mathfrak{W}_T = \{M_\varphi \oplus M_\varphi : \varphi \in L^\infty[0,1]\},$$

从 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty([0,1]$ 上仍然存在等距 *- 同构 Γ^*, 它扩张了 $\mathfrak{C}_T$ 上 Gelfand 变换. 所不同的是, Γ^* 不再是由空间同构装备的.

要知道一般情形下如何得到 Γ^*, 注意到 $f = 1 \oplus 0$ 是 $\mathfrak{W}_T$ 的分离向量, 而空间 $\mathscr{M} = \text{clos}[\mathfrak{W}_T f]$ 就是 $L^2([0,1] \oplus \{0\}$; 它还约化 T, 而映射 $A \mapsto A|_{\mathscr{M}}$ 是从 $\mathfrak{W}_T$ 到由 $T|_{\mathscr{M}}$ 生成的 W*- 代数上的等距 *- 同构. 最后, 算子 $T_{\mathscr{M}}$ 是正规的且 $\mathfrak{C}_{T|_{\mathscr{M}}}$ 有循环向量; 这样上述定理适用于 $T_{\mathscr{M}}$.

我们的规划如下: 对于一个正规算子 T, 证明 $\mathfrak{W}_T$ 具有一个分离向量 f 使 $\mathfrak{W}_T$ 和 $\mathfrak{W}_{T|_{\mathscr{M}}}$ 自然同构, 此处 $\mathscr{M} = \text{clos}[\mathfrak{W}_T f]$. 而将定理 4.58 用于 $T|_{\mathscr{M}}$. 我们就得到了对任意的正规算子所期望的结果. 为证 $\mathfrak{W}_T$ 具有分离向量需要一些关于 W*- 代数的预备结论.

4.60 命题　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个交换 C*- 代数, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的某个极大交换 W*- 代数包含 $\mathfrak{A}$.

证明　$\mathscr{H}$ 上包含 $\mathfrak{A}$ 的交换自伴代数依包含关系构成一个偏序集, 其中诸链的并是包含 $\mathfrak{A}$ 的交换自伴代数, 由 Zorn 引理知该偏序集有极大元. 又由命题 4.47 知该极大元的弱算子拓扑闭包也是交换的, 从而该极大元就是一个 W*- 代数. ■

以下概念对于我们认真研究 W*- 代数是相当重要的.

4.61 定义　设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个子集, 则其换位 $\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 中与 $\mathfrak{A}$ 中诸元交换的算子全体.

容易证明, 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个自伴子集, 则 $\mathfrak{A}'$ 是一个 W*- 代数. 以下性质给出了极大交换代数的一个代数特征.

4.62 命题　$\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的 C*- 子代数 $\mathfrak{A}$ 是极大交换 W*- 代数当且仅当 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

证明　若 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, 则由上述说明知 $\mathfrak{A}$ 是 W*- 代数. 而由定义知 $\mathfrak{A}'$ 与 $\mathfrak{A}$ 中诸

元交换, 故 $\mathfrak{A}$ 是交换的. 若算子 A 与 $\mathfrak{A}$ 交换, 则它属于 $\mathfrak{A}'$ 即已属于 $\mathfrak{A}$. 因此 $\mathfrak{A}$ 是极大交换 W*- 代数.

反之, 若 $\mathfrak{A}$ 是一个交换 W*- 代数, 则 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$. 诸 $T \in \mathfrak{A}'$ 形如 $H + \mathrm{i}K$ 使 H 和 K 是 $\mathfrak{A}'$ 中自伴算子, 由 H 和 K 之一与 $\mathfrak{A}$ 生成的 W*- 代数都是交换的. 因此当 $\mathfrak{A}$ 是极大交换代数时, H 和 K 必属于 $\mathfrak{A}$. 可见, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. ■

4.63 引理　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个 C*- 子代数而 f 是 $\mathscr{H}$ 中一个向量, 则到 $\mathfrak{A}f$ 的闭包上的投影算子 P 属于 $\mathfrak{A}'$.

证明　鉴于命题 4.42, 只需证明 $\operatorname{clos}[\mathfrak{A}f]$ 是 $\mathfrak{A}$ 中诸算子 A 和其共轭 A^* 的不变子空间. 这个事实的显然性源自这个子空间的定义和代数 $\mathfrak{A}$ 的自伴性. ■

对于 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上自伴算子 A 和 B, 以 $A \leqslant B$ 表示 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 满足不等式 $(Af, f) \leqslant (Bf, f)$. 这定义了自伴算子全体上的一个偏序, 而 $0 \leqslant A$ 表示 A 是一个正算子.

以下命题显示了强算子拓扑重要性的众多理由之一.

4.64 命题　设 $\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间而 $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是其上一个正算子网使得当 $\alpha \leqslant \beta$ 时, $P_\alpha \leqslant P_\beta \leqslant I$, 则有自伴算子 P 使诸 $\alpha \in A$ 满足 $P_\alpha \leqslant P \leqslant I$ 且 $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依强算子拓扑收敛至 P.

证明　若 Q 属于 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 且 $0 \leqslant Q \leqslant I$, 要证 $0 \leqslant Q^2 \leqslant Q$. 由命题 4.33 知 $(I-Q)^{\frac{1}{2}}$ 与 Q 交换且 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 使

$$((Q - Q^2)f, f) = (Q(I-Q)^{\frac{1}{2}}f, (I-Q)^{\frac{1}{2}}f) \geqslant 0.$$

又 $\{(P_\alpha f, f)\}_{\alpha \in A}$ 是一个有界递增网, 从而是一个 Cauchy 网. 而当 $\beta \geqslant \alpha$ 时,

$$\begin{aligned} \|(P_\beta - P_\alpha)f\|^2 &= ((P_\beta - P_\alpha)^2 f, f) \\ &\leqslant ((P_\beta - P_\alpha)f, f) \\ &= (P_\beta f, f) - (P_\alpha f, f), \end{aligned}$$

由此知 $\{P_\alpha f\}_{\alpha \in A}$ 依范数是 $\mathscr{H}$ 的一个 Cauchy 网. 记 $Pf = \lim\limits_{\alpha \in A} P_\alpha f$, 则 P 是线性的且

$$\|Pf\| \leqslant \lim_{\alpha \in A} \|P_\alpha f\| \leqslant \|f\|,$$

$$0 \leqslant \lim_{\alpha \in A} (P_\alpha f, f) = (Pf, f).$$

可见, P 是一个有界正算子, 诸 $\alpha \in A$ 使 $P_\alpha \leqslant P \leqslant I$, 且 $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 依强算子拓扑收敛至 P. 证毕. ■

以下定理的逆也成立, 但留作习题.

4.65 定理 可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上极大交换弱 * 代数 $\mathfrak{A}$ 都有循环向量.

证明 以 $\mathscr{E}$ 记 $\mathfrak{A}$ 中满足以下性质的投影算子簇 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 全体:

(1) 诸 $\alpha \in A$ 对应一个非零向量 $f_\alpha \in \mathscr{H}$ 使 E_α 是到 $\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f_\alpha]$ 上的投影算子;

(2) 这些子空间 $\{\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f_\alpha]\}_{\alpha\in A}$ 是相互正交的.

我们要证明 $\mathscr{E}$ 中存在元 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使诸 E_α 的值域张成 $\mathscr{H}$.

非零向量 $f \in \mathscr{H}$ 都使单点集 $\{P_{\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f]}\}$ 属于 $\mathscr{E}$, 因此 $\mathscr{E}$ 非空. 在 $\mathscr{E}$ 中依包含关系引入偏序, 即 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 大于等于 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$ 是指对于每个 $\beta \in B$, 存在 $\alpha \in A$ 使 $F_\beta = E_\alpha$. 显然, $\mathscr{E}$ 的诸链的并属于 $\mathscr{E}$, 由 Zorn 引理知 $\mathscr{E}$ 存在极大元 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

以 $\mathscr{F}$ 记指标集 A 的有限子集 F 全体, 它以包含关系为偏序. 由命题 4.19 的说明, 可作投影算子 $P_F = \sum\limits_{\alpha\in F} E_\alpha$, 这得递增网 $\{P_F\}_{F\in\mathscr{F}}$. 由上述命题知存在正算子 P 使对于每个 $F \in \mathscr{F}$ 有 $P_F \leqslant P \leqslant I$, 且 $\{P_F\}_{F\in\mathscr{F}}$ 依强算子拓扑收敛至 P. 因此 $\{P_F^2\}_{F\in\mathscr{F}}$ 依算子强拓扑收敛至 P^2, 从而 P 是投影算子.

诸 $\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f_\alpha]$ 约化 $\mathfrak{A}$, 因此 E_α 属于 $\mathfrak{A}$ 的换位. 又 $\mathfrak{A}$ 是极大交换的, 诸 E_α 属于 $\mathfrak{A}$. 再由 $\mathfrak{A}$ 的弱闭性和交换性知 P 属于 $\mathfrak{A}$ 且 P 的值域 $\mathscr{M}$ 约化 $\mathfrak{A}$. 要证 $\mathscr{M} = \mathscr{H}$, 否则, $\mathscr{M}^\perp$ 中非零向量 f 都使 $\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f]$ 与诸 E_α 的值域正交. 以 E_β 记到闭线性子空间 $\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f]$ 的投影算子, 则 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A\cup\{\beta\}}$ 是 $\mathscr{E}$ 中严格包含 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的一个元素, 矛盾.

因为 $\mathscr{H}$ 可分, $\dim\ \mathrm{ran}E_\alpha > 0$ 且 $\dim\mathscr{H} = \sum\limits_{\alpha\in A} \dim\ \mathrm{ran}E_\alpha$, 所以 A 是可数的. 将 A 编号后写为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 并命 $f = \sum\limits_{i\geqslant 1} \dfrac{f_{\alpha_i}}{2^i\|f_{\alpha_i}\|}$, 则 $E_{\alpha_i} f = \dfrac{f_{\alpha_i}}{2^i\|f_{\alpha_i}\|}$, 可见 E_{α_i} 的值域含于 $\mathrm{clos}[\mathfrak{A}f]$. 因为 E_{α_i} 的值域张成 $\mathscr{H}$, 所以 f 就是 $\mathfrak{A}$ 的循环向量. ■

以上定理中, $\mathscr{H}$ 可分的假设只在最后说明 A 可数时用到. 以下结果将用于我们对正规算子的研究.

4.66 推论 若 $\mathfrak{A}$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个交换 C*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 有分离向量.

证明 由命题 4.60 知 $\mathfrak{A}$ 含于一个极大交换 W*- 代数 $\mathfrak{B}$ 中, 由定理 4.65 知 $\mathfrak{A}$ 具有循环向量 f. 最后, 由引理 4.57 可知 f 分离 $\mathfrak{B}$, 从而也分离子代数 $\mathfrak{A}$. ■

前面两个结果的适当应用背景是这样的 W*- 代数, 该代数里每族相互正交的投影算子都是可数的. 这种特性对于可分 Hilbert 空间上算子代数总是成立的, 但对于不可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子代数来说及不一定对了, 比如考虑 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$.

在继续讨论之前, 我们需要一个与 C*- 代数之间同态有关的技术性结果.

4.67 命题 设 $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是两个 C*- 代数之间一个 *- 同态, 则 $\|\Phi\| \leqslant 1$, 而 Φ 是等距的当且仅当 Φ 是一对一的.

证明 若 H 是 $\mathfrak{A}$ 中一个自伴元, 则 $\mathfrak{C}_H$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个交换 C*- 子代数而 $\Phi(\mathfrak{C}_H)$

便是 $\mathfrak{B}$ 的一个交换 *- 子代数. 若 ψ 是 $\Phi(\mathfrak{C}_H)$ 的闭包上一个可乘线性泛函, 则 $\psi\circ\Phi$ 是 $\mathfrak{C}_H$ 上一个可乘线性泛函. 由定理 4.29 可以取 ψ 使 $|\psi(\Phi(H))| = \|\Phi(H)\|$. 于是有

$$\|H\| \geqslant |\psi(\Phi(H))| = \|\Phi(H)\|,$$

从而 Φ 在 $\mathfrak{A}$ 的自伴元上是压缩的. 现在要证 $\|\Phi\| \leqslant 1$. 事实上诸 $T \in \mathfrak{A}$ 使

$$\begin{aligned}\|T\|^2 =& \|T^*T\| \geqslant \|\Phi(T^*T)\| \\ =& \|\Phi(T)^*\Phi(T)\| = \|\Phi(T)\|^2.\end{aligned}$$

对于第二个结论, 注意到等距蕴涵一对一性, 可设 Φ 不是个等距. 因此 $\mathfrak{A}$ 存在元素 T 使 $\|T\| = 1$ 且 $\|\Phi(T)\| < 1$. 命 $A = T^*T$, 则 $\|A\| = 1$ 且存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\|\Phi(A)\| = 1 - \varepsilon$. 取实值函数 $f \in C[0,1]$ 使 $f(1) = 1$, 且当 $0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$ 时, $f(x) = 0$. 利用 $\mathfrak{C}_A$ 上函数演算得到 $f(A)$, 又由推论 2.37 得

$$\sigma(f(A)) = \mathrm{ran}\Gamma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

因此 1 属于 $\sigma(f(A))$, 而 $f(A) \neq 0$. 因为 Φ 是一个压缩 *- 同态且诸多项式 p 使 $\Phi(p(A)) = p(\Phi(A))$, 所以 $\Phi(f(A)) = f(\Phi(A))$. 然而, $\|\Phi(A)\| = 1 - \varepsilon$, 由此得 $\sigma(\Phi(A)) \subseteq [0, 1-\varepsilon]$, 于是

$$\sigma(\Phi(f(A))) = f(\sigma(\Phi(A))) \subseteq f([0, 1-\varepsilon]) = \{0\}.$$

因为 $\Phi(f(A))$ 是自伴的, 所以 $\Phi(f(A)) = 0$, 从而 Φ 不是一对一的. ■

现在我们已经准备好把函数演算扩展至可分 Hilbert 空间上任意正规算子上去.

4.68 设 T 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子. 由推论 4.66 知交换 W*- 代数 $\mathfrak{W}_T$ 有分离向量. 命 $\mathscr{M} = \mathrm{clos}[\mathfrak{W}_T f]$, 它是诸 $A \in \mathfrak{W}_T$ 的约化子空间. 因此从 $\mathfrak{W}_T$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{M})$ 有映射 $\Phi : A \mapsto A|_{\mathscr{M}}$, 它是 *- 同态的. 我们将用上述结果证明 Φ 是等距 *- 同构的.

4.69 引理 设 $\mathscr{H}$ 上某个 C*- 子代数 $\mathfrak{A}$ 有分离向量 f, 而 $\mathscr{M}$ 是 $\mathfrak{A}f$ 的闭包, 则从 $\mathfrak{A}$ 至 $\mathfrak{L}(\mathscr{M})$ 的映射 $\Phi : A \mapsto A|_{\mathscr{M}}$ 是等距 *- 同态的. 进而, $\mathfrak{A}$ 中诸算子 T 使 $\sigma(A) = \sigma(A|_{\mathscr{M}})$.

证明 显然 Φ 是 *- 同态的, 需证明 Φ 是一对一的. 若 $\Phi(T) = 0$, 则 $Tf = 0$. 因为 f 是 $\mathfrak{A}$ 的分离向量, 所以 $T = 0$. 最后, 由定理 4.28 得

$$\sigma_{\mathfrak{L}(\mathscr{H})}(A) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \sigma_{\Phi(\mathfrak{A})}(A|_{\mathscr{M}}) = \sigma_{\mathfrak{L}(\mathscr{M})}(A|_{\mathscr{M}}).$$

证毕. ■

最后我们还需要以下结果, 其证明与定理 1.23 的类似, 因此留为习题.

4.70 命题 设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 W*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 的单位球依弱算子拓扑是紧的.

现在可以给出我们关于正规算子的主要结果了.

4.71 定理 (扩充函数演算) 设 T 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 其谱为 Λ. 设 Γ 是 $\mathfrak{C}_T$ 到 $C(\Lambda)$ 的 Gelfand 变换, 则有支集为 Λ 的正 Borel 测度 ν 及从 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty(\nu)$ 上的一个等距 *- 同构 Γ^*, 它是 Γ 的扩张. 进而 ν 在相互绝对连续意义下是唯一的, 而 $L^\infty(\nu)$ 和 Γ^* 是唯一的.

证明 设 f 是 $\mathfrak{W}_T$ 的一个分离向量, $\mathscr{M}$ 是 $\mathfrak{W}_T f$ 的闭包. 像 4.68 节那样规定从 $\mathfrak{W}_T$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{M})$ 的等距 *- 同态 $\Phi: A \mapsto A|_{\mathscr{M}}$. 以 $\mathfrak{W}_{\mathscr{M}}$ 记 $T|_{\mathscr{M}}$ 生成的 W*- 代数. 同态 Φ 是通过限制算子的定义域来定义的, 它便依 $\mathfrak{W}_T$ 的弱算子拓扑和 $\mathfrak{L}(\mathscr{M})$ 的弱算子拓扑连续, 因此 $\Phi(\mathfrak{W}_T) \subseteq \mathfrak{W}_{\mathscr{M}}$. 倘若 Γ_0 是 $\mathfrak{C}_{T|_{\mathscr{M}}}$ 到 $C(\Lambda)$ 上的 Gelfand 变换, 显然 $\Gamma = \Gamma_0 \circ (\Phi|_{\mathfrak{C}_T})$.

既然 $T|_{\mathscr{M}}$ 是一个正规算子且有一个循环向量 f, 据引理 4.69 知 $\sigma(T|_{\mathscr{M}}) = \Lambda$, 由定理 4.58 得有支集为 Λ 的正 Borel 测度 ν 和一个从 $\mathfrak{W}_{\mathscr{M}}$ 到 $L^\infty(\nu)$ 上的等距 *- 同构 Γ_0^*, 它扩张了 $\mathfrak{C}_{T|_{\mathscr{M}}}$ 上 Gelfand 变换 Γ_0 且依 $\mathfrak{W}_{\mathscr{M}}$ 上弱算子拓扑和 $L^\infty(\nu)$ 上弱 * 拓扑连续. 因此复合 $\Gamma^* = \Gamma_0^* \circ \Phi$ 是 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty(\nu)$ 的等距 *- 同构, 它依 $\mathfrak{W}_{\mathscr{M}}$ 上弱算子拓扑和 $L^\infty(\nu)$ 上弱 * 拓扑连续, 且扩张了 $\mathfrak{C}_T$ 上 Gelfand 变换.

唯一还需证明的是 Γ^* 将 $\mathfrak{W}_T$ 映满 $L^\infty(\nu)$. 为此, 我们论证如下: 因为 $\mathfrak{W}_T$ 的单位球依弱算子拓扑紧, 所以其像在 $L^\infty(\nu)$ 中弱 * 紧, 从而是弱 * 闭集. 而该像集包含 $C(\Lambda)$ 的单位球, 由命题 4.52 知 Γ^* 将 $\mathfrak{W}_T$ 的单位球映满 $L^\infty(\nu)$ 的单位球, 从而 Γ^* 是到上的.

唯一性如定理 4.58 的证明一样, 可由定理 4.55 得到. ■

4.72 定义 设 T 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 则 $\Lambda = \sigma(T)$ 上有测度的唯一等价类使其中每个测度 ν 对应一个从 $\mathfrak{W}_T$ 到 $L^\infty(\nu)$ 上的等距 *- 同构 Γ^* 使 $C(\Lambda)$ 中诸函数 φ 满足 $\Gamma^*(\varphi(T)) = \varphi$. 这样的测度 ν 称为 T 的数值谱测度. 规定 $L^\infty(\nu)$ 中诸函数 φ 关于 T 的扩充函数演算使 $\Gamma^*(\varphi(T)) = \varphi$. 若 I_Δ 是 $L^\infty(\nu)$ 中一个特征函数, 则 $I_\Delta(T)$ 是代数 $\mathfrak{W}_T$ 中一个投影算子, 这称为 T 的谱投影, 其值域称为 T 的谱子空间.

结束本章前, 我们给出不可分 Hilbert 空间上正规算子的一些说明和一个命题, 这在某些情况下可让我们对于这些算子使用扩充函数演算的某些方面. 我们从一个本质上已经证明了的命题开始.

4.73 命题 设 $\mathfrak{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上依算子范数可分的一个 C*- 代数, 则 $\mathscr{H}$ 有正交分解 $\sum\limits_{\alpha \in A} \oplus \mathscr{H}_\alpha$ 使诸 $\mathscr{H}_\alpha$ 是 $\mathfrak{A}$ 的可分约化子空间.

证明　由定理 4.65 证明的前三段得 $\mathscr{H}$ 的一个正交分解 $\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus\mathscr{H}_\alpha$ 使诸分量 $\mathscr{H}_\alpha$ 形如 $\operatorname{clos}[\mathfrak{A}f_\alpha]$. 因为 $\mathfrak{A}$ 是范数可分的, 所以 $\mathscr{H}_\alpha$ 可分, 由此得结论. ■

4.74　由上述结果知若 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 则每个限制 $T_\alpha = T|_{\mathscr{H}_\alpha}$ 是可分 Hilbert 空间上一个正规算子, 因而具有数值谱测度 ν_α. 若有测度 ν 使诸 ν_α 都相对于 ν 绝对连续, 则可以证明定理 4.71 对于 T 也成立. 若没有这样的测度 ν, 则关于 T 的函数演算通常基于 Λ 上有界 Borel 函数代数. 特别地, 对于 Λ 上每个有界 Borel 函数 φ, 定义 $\varphi(T) = \sum\limits_{\alpha\in A}\oplus\varphi(T_\alpha)$. 这种处理的基本不足是这种函数演算的值域不再是 $\mathfrak{W}_T$, 且 $\varphi(T)$ 的范数也不容易计算.

有时关于 T 的谱测度 $E(\cdot)$ 是研究的主题. 若 Δ 是 Λ 的 Borel 集, 则定义谱测度

$$E(\Delta) = I_\Delta(T) = \sum_{\alpha\in A}\oplus I_\Delta(T_\alpha).$$

于是 E 是投影算子值的测度且诸 $f\in\mathscr{H}$ 对应的 $(E(\Delta)f, f)$ 关于 Δ 是可列可加的. 还可以定义 Stieltjies 积分使 $T = \int\limits_\Lambda z\mathrm{d}E$. 除了证明 T 的谱测度的值域落于 $\mathfrak{W}_T$, 我们不深入展开这些想法.

4.75 命题　设 $E(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}$ 上正规算子 T 的谱测度, 则 Λ 的 Borel 集 Δ 都使 $E(\Delta)$ 属于 $\mathfrak{W}_T$.

证明　设依 T 的分解 $T = \sum\limits_{\alpha\in A}\oplus T_\alpha$ 定义了谱测度 $E(\cdot)$, 这里 T_α 作用于一个可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\alpha$ 从而有数值谱测度 μ_α. 以 $\mathscr{F}$ 记 A 的有限子集全体, 则 $\mathscr{H}$ 有个稠密线性子空间 $\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}}\sum\limits_{\alpha\in F}\oplus\mathscr{H}_\alpha$ 是对于 Λ 的 Borel 集 Δ 和 $F\in\mathscr{F}$ 及 $\sum\limits_{\alpha\in F}\oplus H_\alpha$ 中向量 $f_1,\cdots,f_n$ 和 $\varepsilon>0$, 只需找个 $\varphi\in C(\Lambda)$ 使 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ 且 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|\varphi(T)-E(\Delta)f_i\|<\varepsilon$. 注意到诸 $\varphi\in C(\Lambda)$ 满足以下等式

$$\begin{aligned}\|(\varphi(T)-E(\Delta))f_i\|^2 &= \sum_{\alpha\in F_0}\|(\varphi(T_\alpha)-I_\Delta(T_\alpha))P_{\mathscr{H}_\alpha}f_i\|^2\\ &= \sum_{\alpha\in F_0}\int_\Lambda|\varphi-I_\Delta|^2|P_{\mathscr{H}_\alpha}f_i|^2\mathrm{d}\mu_\alpha,\end{aligned}$$

用命题 4.52 可得满足要求的 φ. ■

本章最后我们介绍以下重要而令人称道的结论, 其巧妙证明源自 Rosenblum [93].

4.76 定理 (Fuglede)　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子且 X 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子使得 $TX = XT$, 则 $T^*X = XT^*$, 即 X 属于 $\mathfrak{W}_T'$.

证明　因 $\mathfrak{W}_T$ 是由 T 和 T^* 生成的, 一旦确立了 $T^*X = XT^*$ 就会得到结论.

归纳地知诸自然数 k 使 $T^kX = XT^k$, 诸复数 λ 便使 $\exp(\mathrm{i}\bar{\lambda}T)X = X\exp(\mathrm{i}\bar{\lambda}T)$, 即 $X = \exp(\mathrm{i}\bar{\lambda}T)X\exp(-\mathrm{i}\bar{\lambda}T)$. 由等式 $TT^* = T^*T$ 和引理 2.12 有

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \exp(\mathrm{i}\lambda T^*)X\exp(-\mathrm{i}\lambda T^*)\\ &= \exp(\mathrm{i}(\bar{\lambda}T + \lambda T^*))X\exp(-\mathrm{i}(\bar{\lambda}T + \lambda T^*)).\end{aligned}$$

因为 $\bar{\lambda}T + \lambda T^*$ 是自伴的, 诸复数 λ 使 $\exp(\mathrm{i}(\bar{\lambda}T + \lambda T^*))$ 和 $\exp(-\mathrm{i}(\bar{\lambda}T + \lambda T^*))$ 是酉算子. 于是算子值整函数 $F(\lambda)$ 有界, 它由 Liouville 定理知为常值函数 (参见定理 2.29 的证明). 最后对 λ 求导数得

$$\begin{aligned}F'(\lambda) =& \mathrm{i}T^*\exp(\mathrm{i}\lambda T^*)X\exp(-\mathrm{i}\lambda T^*)\\ &- \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\lambda T^*)X\exp(-\mathrm{i}\lambda T^*)T^* = 0,\end{aligned}$$

命 $\lambda = 0$ 得到 $T^*X = XT^*$. ■

注　记

自伴算子的谱定理由 Hilbert 建立, 但基础算子理论是由许多人完成的, 这包括 Hilbert, Riesz, Weyl, von Neumann, Stone 及其他一些人. 现在仍然有意义的早期工作有 von Neumann 的早期论文 [81], [82] 和 Stone 的书 [104]. 相对近期的书有 Akhiezer and Glazman [2], Halmos [55], [58], Kato [70], Maurin [79], Naimark [80], Riesz and Sz. -Nagy [92], and Yoshida [117].

我们仅介绍了 C*- 和 W*- 代数最基本的内容. 有兴趣者可以参阅 Dixmier 的两本书 [27], [28] 以便获得这一课题的丰富知识和浩瀚文献.

习　题

习题 4.1 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个线性变换, 则 T 有界当且仅当

$$\sup\{|(Tf, f)| : f \in \mathscr{H}, \|f\| = 1\} < \infty.$$

定义 规定 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T 的数值域为

$$W(T) = \{(Tf, f) : f \in \mathscr{H}, \|f\| = 1\}$$

和数值半径为

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

习题 4.2(Hausdorff-Toeplitz) 设 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $W(T)$ 是凸集. 进而当 $\mathscr{H}$ 是有限维空间时, $W(T)$ 是紧的. (提示: 考虑将 T 压缩到 $\mathscr{H}$ 的二维子空间情形的 $W(T)$.)

习题 4.3　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子, 则 $W(T)$ 的闭包是 $\sigma(T)$ 的闭凸包. 而 $W(T)$ 的闭包的端点属于 $\sigma(T)$ 当且仅当该端点是 T 的本征值.

习题 4.4　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $\sigma(T)$ 含于 $W(T)$ 的闭包之内. (提示: 若 $W(T)$ 的闭包落在开的右半平面内, 证明 T 可逆.)

习题 4.5　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则

$$r(T) \leqslant w(T) \leqslant \|T\|$$

且两个不等式都可能是严格的.

习题 4.6(Hellinger-Toeplitz)　若 S 和 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上映射使 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 和 g 满足等式 $(Sf,g)=(f,Tg)$, 则 S 和 T 都是有界线性变换且 $T=S^*$.

习题 4.7　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 T 的图像 $\{\langle f,Tf\rangle : f\in\mathscr{H}\}$ 是 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间, 且其正交补等于 $\{\langle -T^*g,g\rangle : g\in\mathscr{H}\}$.

习题 4.8　设 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 T 是正规的当且仅当 $\mathscr{H}$ 中诸向量 f 使 $\|Tf\|=\|T^*f\|$. 而复数 λ 是正规算子 T 的一个本征值当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的一个本征值. 后一结论对于无限维 Hilbert 空间上一般算子不成立.

习题 4.9　设 S 和 T 是 $\mathscr{H}$ 上自伴算子, 则 ST 是自伴的当且仅当 S 和 T 交换. 若 P 和 Q 是 $\mathscr{H}$ 上投影算子, 则 PQ 是投影算子当且仅当 P 和 Q 交换; 此时确定 PQ 的值域.

习题 4.10　若 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 都是 Hilbert 空间, A 是 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 上一个算子, 则有唯一一组算子 $A_{11}\in\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 和 $A_{12}\in\mathfrak{L}(\mathscr{K},\mathscr{H})$ 以及 $A_{21}\in\mathfrak{L}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 和 $A_{22}\in\mathfrak{L}(\mathscr{K})$ 使

$$A\langle h,k\rangle = \langle A_{11}h+A_{12}k, A_{21}h+A_{22}k\rangle.$$

换言之, A 可写成矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

反之, 说明这样一个矩阵定义了 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 上一个算子.

习题 4.11　若 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是两个 Hilbert 空间, 对于 $A\in\mathfrak{L}(\mathscr{K},\mathscr{H})$, 作 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 上算子

$$J=\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 J 是幂等的, 而它是投影算子当且仅当 $A=0$. 进而, Hilbert 空间 $\mathscr{L}$ 上幂等算子都可依适当正交分解 $\mathscr{L}=\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 写成以上形式.

定义　设 T_1 和 T_2 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上算子, 则 T_1 与 T_2 是相似 (酉等价) 的是指从 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 有个可逆算子 (等距同构)S 使 $T_2S=ST_1$.

习题 4.12　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, J 是 $\mathscr{H}$ 上一个幂等算子, 值域为 $\mathscr{M}$, 则 J 和 $P_{\mathscr{M}}$ 是相似算子.

习题 4.13　若 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是概率空间, 对于 $L^\infty(\mu)$ 中函数 φ, 复数 λ 是乘法算子 M_φ 的一个本征值当且仅当 $\{x\in X:\varphi(x)=\lambda\}$ 有正测度.

习题 4.14　证明 4.25 节中定义的酉算子 U 没有本征值, 而 4.36 节定义的共轭等距 U_+^* 的本征值的重数都为一.

习题 4.15　若 $\mathfrak{A}$ 是 C*- 代数, 则其正元全体 $\mathscr{P}$ 是个闭凸锥且 $\mathscr{P}\cap(-\mathscr{P})=\{0\}$. (提示: 证明 $\mathfrak{A}$ 中自伴压缩 H 是正的当且仅当 $\|I-H\|\leqslant 1$.)

习题 4.16　若 $\mathfrak{A}$ 是 C*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 中元 H 是正的当且仅当 $\mathfrak{A}$ 有个元素 T 使 $H=T^*T$. (提示: 将 T^*T 写成两个正元之差并证明第二项为零.)

习题 4.17　若 P 和 Q 是 $\mathscr{H}$ 上投影算子使 $\|P-Q\|<1$, 则 $\dim\operatorname{ran}P=\dim\operatorname{ran}Q$. (提示: 证明算子 $(I-P)+Q$ 可逆, $\ker P\cap\operatorname{ran}Q=\{0\}$ 且 $P[\operatorname{ran}Q]=\operatorname{ran}P$.)

习题 4.18　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 V 是等距的当且仅当 $V^*V=I$. 若 V 是等距的, 则 V 是酉算子当且仅当 V^* 是等距的当且仅当 $\ker V^*=\{0\}$.

习题 4.19　若 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是两个 Hilbert 空间, A 是 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 上算子, 它形如以下矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

则 $\mathscr{H}\oplus\{0\}$ 是 A 的不变子空间当且仅当 $A_{21}=0$, 而 $\mathscr{H}\oplus\{0\}$ 是 A 的约化子空间当且仅当 $A_{21}=0$ 且 $A_{12}=0$.

习题 4.20　设 U_+ 是单侧移位, 则序列 $\{U_+^n\}_{n=1}^\infty$ 依弱算子拓扑收敛至零但不依强算子拓扑收敛. 而序列 $\{U_+^{*n}\}_{n=1}^\infty$ 依强算子拓扑收敛至零但不依范数收敛.

习题 4.21　证明无限维 Hilbert 空间上两个算子变量的乘法运算依弱算子拓扑和算子强拓扑都不连续, 但它限于 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的单位球上后依算子强拓扑连续.

习题 4.22　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的单位球依弱算子拓扑是紧的, 但在 $\mathscr{H}$ 无限维时依强算子拓扑不紧. (提示: 参见定理 1.23 的证明.)

习题 4.23　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 W*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 的单位球依弱算子拓扑是紧的.

习题 4.24　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 *- 代数, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H}\oplus\mathscr{H})$ 有 *- 子代数

$$\mathfrak{A}_{(2)}=\left\{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}: A\in\mathfrak{A}\right\}.$$

类似地, 对任意 N, 可定义 $\mathfrak{L}(\mathscr{H}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H})$ 的 *- 子代数 $\mathfrak{A}_{(N)}$ 使 $(\mathfrak{A}_{(N)})''=(\mathfrak{A}'')_{(N)}$, 而且 $\mathfrak{A}_{(N)}$ 依范数 (强算子、弱算子) 拓扑是闭集当且仅当 $\mathfrak{A}$ 自身如此.

习题 4.25　设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 *- 代数. 对于 $A \in \mathfrak{A}''$ 和 $\mathscr{H}$ 中向量 $x_1, \cdots, x_N$ 和正数 ε, 有个 $B \in \mathfrak{A}$ 使 $\|Ax_i - Bx_i\| < \varepsilon(i = 1, 2, \cdots, N)$. (提示: 对于 $\mathscr{H} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}$ 的线性子空间 $\mathscr{M}$, 证明 $\text{clos}[\mathfrak{A}''_{(N)}\mathscr{M}] = \text{clos}[\mathfrak{A}_{(N)}\mathscr{M}]$.)

习题 4.26 (von Neumann 双换位定理)　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 *- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 是 W*- 代数当且仅当 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$.*

习题 4.27　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 *- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 是 W*- 代数当且仅当 $\mathfrak{A}$ 依强算子拓扑是闭集.

习题 4.28　设 S 和 T 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 上算子, 则在 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ 上可以自然定义算子 $S \otimes T$ 使 $\|S \otimes T\| = \|S\|\|T\|$ 且 $(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*$.

在习题 4.29—4.34 中, 我们考虑定义在 Hilbert 空间的线性子空间上线性变换.

定义　从 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个线性子空间 $\mathscr{D}_L$ 至 $\mathscr{H}$ 的线性变换 L 为一个可闭变换是指其图像 $\{(f, Lf) : f \in \mathscr{D}_L\}$ 在 $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ 的闭包是某个线性变换 $\overline{L}$ 的图像, 此时称 $\overline{L}$ 是 L 的闭包. 若 L 有稠密定义域、可闭且 $L = \overline{L}$, 则称 L 是闭的.

习题 4.29　举出一例不可闭的稠定线性变换. 若 T 是闭线性变换使得 $\mathscr{D}_T = \mathscr{H}$, 则 T 有界.

习题 4.30　若 L 是 $\mathscr{H}$ 上一个稠定可闭线性变换, 则 $\mathscr{H}$ 上存在稠定闭线性变换 M 使

$$(Lf, g) = (f, Mg), \quad f \in \mathscr{D}_L, g \in \mathscr{D}_M,$$

而且若 N 也是 $\mathscr{H}$ 上一个线性变换使

$$(Lf, g) = (f, Ng), \quad f \in \mathscr{D}_L, g \in \mathscr{D}_N,$$

则 $\mathscr{D}_N \subseteq \mathscr{D}_M$ 且诸 $g \in \mathscr{D}_N$ 满足 $Ng = Mg$. (提示: 证明 M 的图像可以如习题 4.7 一样作为 L 的图像的正交补而获得.)

定义　若 L 是 Hillbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个稠定可闭线性变换, 则上述习题中所得算子 M 称为 L 的共轭并记为 L^*.称 $\mathscr{H}$ 上稠定可闭线性变换 H 为一个对称变换是指 $\mathscr{D}_H$ 中诸向量 f 使内积 (Hf, f) 为实数; 称 H 为一个自伴变换, 是指 $H = H^*$.

习题 4.31　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个稠定闭线性变换, 则 $T = T^{**}$(这包含个事实: $\mathscr{D}_T = \mathscr{D}_{T^{**}}$).* 若 H 是 $\mathscr{H}$ 上稠定对称变换, 则 H 可闭且 H^* 扩张了 H.

习题 4.32　若 $\mathscr{H}$ 上一个对称变换 H 有值域 $\mathscr{H}$, 则 H 是自伴的.

习题 4.33　若 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个稠定闭变换, 则 T^*T 是一个稠定的对称变换. (注: 式子 T^*Tf 只对于那些使 Tf 属于 $\mathscr{D}_{T^*}$ 的 $\mathscr{D}_T$ 中向量 f 有定义.)

习题 4.34　若 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个稠定闭变换, 则 T^*T 是一个自伴变换. (提示: 证明 $I + T^*T$ 的值域在 $\mathscr{H}$ 中既稠密又闭.)

习题 4.35　可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上交换 W*- 代数 $\mathfrak{A}$ 都与某个概率空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上的 $L^\infty(\mu)$ 是等距 *- 同构的.

习题 4.36　证明有两个 *- 同构的 W*- 代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$, 但 $\mathfrak{A}'$ 和 $\mathfrak{B}'$ 不是 *- 同构的.

习题 4.37　可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上交换 *- 代数 $\mathfrak{A}$ 是极大交换代数当且仅当 $\mathfrak{A}$ 有循环向量.

习题 4.38　按如下方式给出可分 Hilbert 空间上正规算子的 Fuglede 定理的另一证明方法: 说明只需证明无交 Borel 集 $\varDelta_1$ 和 $\varDelta_2$ 都使 $E(\varDelta_1)XE(\varDelta_2)=0$; 先证这对于相距为正的 Borel 集成立, 而对于一般情形从里面用紧集来逼近.

习题 4.39(Putnam)　设 T_1 和 T_2 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上正规算子, 设 $\mathscr{H}_1$ 至 $\mathscr{H}_2$ 存在算子 X 满足等式 $T_2X=XT_1$, 则 $T_2^*X=XT_1^*$. (提示: 考虑 $\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$ 上正规算子 $\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$ 和算子 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$.)

习题 4.40　设 T_1 和 T_2 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上正规算子, 则 T_1 与 T_2 相似当且仅当 T_1 与 T_2 酉等价.

习题 4.41　设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, $\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间, $\varPhi$ 是从 $C(X)$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 内的一个 *- 同构. 若存在 $f\in\mathscr{H}$ 使 $\varPhi(C(X))f$ 稠于 $\mathscr{H}$, 证明有 X 上一个 Borel 概率测度 μ 和从 $L^2(\mu)$ 到 $\mathscr{H}$ 上的一个等距同构 $\varPsi$ 使 $\varPhi:\varphi\mapsto\varPsi M_\varphi\varPsi^*$. (提示: 重复定理 4.58 的证明方法.)

习题 4.42　设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, $\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间, $\varPhi$ 是从 $C(X)$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 内的一个 *- 同构, 则它能扩张成 X 上有界 Borel 函数代数 $\mathfrak{B}(X)$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个 *- 同态 $\varPhi^*$, 而且 $\varPhi^*$ 的值域含于 $\varPhi$ 的值域所生成的 W*- 代数. (提示: 使用 4.74 节和命题 4.75 以及上一习题的论证方法.)

第 5 章　紧算子和 Fredholm 算子及指标理论

5.1　在上一章, 我们研究了 Hilbert 空间上算子, 特别得到了正规算子谱定理. 正如我们所指出的, 这个结论可以看成有限维空间上正规矩阵的对角化理论在无限维空间上算子的适当推广. 然而还有一类算子, 它们可以看做有限维空间上算子在某种拓扑意义下的推广, 本章我们将研究这类算子和与其相关的一类算子. 不过我们对研究内容的组织与传统方式不同, 目的是尽快得到主要结果. 我们先引入紧算子类并证明它等于有限秩算子全体的范数闭包. 此后我们给出几例具体紧算子, 接着引入 Fredholm 算子概念. 我们从以下定义开始.

5.2 定义　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 它是有限秩算子是指其值域为有限维空间, 它是紧算子是指它将 $\mathscr{H}$ 的单位球映成紧集. 分别以 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 和 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 记 $\mathscr{H}$ 上有限秩算子全体和紧算子全体.

鉴于 Hilbert 空间的有限维线性子空间都是闭集, 有限秩算子都有闭值域. 在定义紧算子时, 通常只假定 $T[(\mathscr{H})_1]$ 有紧闭包. 这两个定义的等价性源自以下引理的推论.

5.3 引理　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则其上诸算子 T 是从带弱拓扑的 $\mathscr{H}$ 至带弱拓扑的 $\mathscr{H}$ 的一个连续函数.

证明　设 $\mathscr{H}$ 中网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛至 f, 则对于 $g\in\mathscr{H}$ 有

$$\lim_{\alpha\in A}(Tf_\alpha,g)=\lim_{\alpha\in A}(f_\alpha,T^*g)=(f,T^*g)=(Tf,g),$$

从而网 $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛至 Tf. 因此 T 是弱连续的. ■

5.4 推论　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $T[(\mathscr{H})_1]$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个闭集.

证明　因 $(\mathscr{H})_1$ 是弱紧的且 T 是弱连续的, 故 $T[(\mathscr{H})_1]$ 是弱紧的从而是弱闭的, 它便是范数闭的. ■

以下命题总结了关于有限秩算子的大部分基本事实.

5.5 命题　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个双边 *- 理想且是最小非零双边理想.

证明　设 S 和 T 是 $\mathscr{H}$ 上有限秩算子. 线性组合 $aS+bT$ 为有限秩的理由如下

$$\operatorname{ran}(aS+bT)\subseteq\operatorname{ran}S+\operatorname{ran}T.$$

于是, $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 是线性子空间. 若 A 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 由 $\operatorname{ran} SA \subseteq \operatorname{ran} S$ 知 SA 是有限秩的, 而 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 便是 $\mathfrak{L}(H)$ 的一个左理想. 有限秩算子都有闭值域, 由命题 4.6 和推论 3.22 得

$$\operatorname{ran}T^* = T^*[(\ker T^*)^{\perp}] = T^*[\operatorname{ran}T],$$

故 T^* 是有限秩的, 从而 T^*A^* 是有限秩的, 它取共轭后知 AT 是有限秩的. 可见, $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个双边 *- 理想.

为证 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 是最小非零双边理想, 任取 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个非零双边理想 $\mathfrak{J}$. 它含有非零算子 T, 从而 $\mathscr{H}$ 中有非零向量 f 和单位向量 g 使 $Tf = g$. 任取 $\mathscr{H}$ 中单位向量 h 和 k, 作 $\mathscr{H}$ 上算子 $A: l \mapsto (l, g)k$ 和 $B: l \mapsto (l, h)f$. 命 $S = ATB$, 这是 $\mathfrak{J}$ 中将 h 映到 k 的秩一算子. 现在很清楚, $\mathfrak{J}$ 包含全体有限秩算子. 可见, $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的最小双边理想. ■

以下命题给出了紧算子的另一特征.

5.6 命题　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子 T 是紧的当且仅当 $\mathscr{H}$ 中任意有界弱收敛网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的像 $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 都依范数收敛.

证明　设 T 是紧的且有界网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛至 f, 由引理 5.3 知网 $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛至 Tf 且落于某个范数紧集. 因 $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的任何依范数收敛的子网都收敛至 Tf, 故 $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 依范数收敛至 Tf.

反之, 因单位球 $(\mathscr{H})_1$ 是弱紧集, 其中网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 都有弱收敛子网 $\{f_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in B}$, 从而在子空间 $T[(\mathscr{H})_1]$ 中网 $\{Tf_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in B}$ 依范数收敛. 这样 $T[(\mathscr{H})_1]$ 是 $\mathscr{H}$ 的紧集, 从而 T 是紧的. ■

5.7 引理　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的单位球在范数拓扑下是紧集当且仅当 $\mathscr{H}$ 是有限维的.

证明　若 $\mathscr{H}$ 是有限维的, 则它等距同构于某个 $\mathbb{C}^n$, 由此得 $(\mathscr{H})_1$ 的紧性; 若 $\mathscr{H}$ 是无限维的, 取其一个规范正交序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. 当 $n \neq m$ 时, $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, 这表明 $(\mathscr{H})_1$ 在范数拓扑下不是紧集. ■

以下性质实际上刻画了 Hilbert 空间上紧算子, 但其逆的证明要延至下一个定理之后. 该性质不刻画大多数 Banach 空间上紧算子.

5.8 引理　无限维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上紧算子 T 的值域都不包含无限维闭线性子空间.

证明　设 $\mathscr{M}$ 是 $\operatorname{ran}T$ 的一个闭线性子空间, $P_{\mathscr{M}}$ 是到其上的投影算子. 由命题 5.6 可知 $P_{\mathscr{M}}T$ 是紧算子. 从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{M}$ 的线性算子 $A: f \mapsto P_{\mathscr{M}}Tf$ 是有界的和到上的, 由开映射定理知 $A[(\mathscr{H})_1]$ 包含 $\mathscr{M}$ 中以原点为球心以某个正数 δ 为半径的开球, 相应的闭球仍含于紧集 $A[(\mathscr{H})_1]$. 由上述引理知 $\mathscr{M}$ 是有限维的. ■

我们现在能够证明 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 依算子范数拓扑的闭包, 相应的结果对

于大多数 Banach 空间不成立.

5.9 定理　若 $\mathscr{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 的算子范数闭包.

证明　我们先证 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 的闭包含于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$. 首先, $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 显然含于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$. 其次, 为证 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 是闭集, 设紧算子列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依算子范数收敛至 K. 若 $\mathscr{H}$ 中有界网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛至 f, 命 $M=\sup\{\|f\|,\|f_\alpha\|:\alpha\in A\}$. 可设 $M>0$, 取 N 使 $\|K-K_N\|<\varepsilon/(3M)$. 因 K_N 是一个紧算子, 由命题 5.6 知存在 $\alpha_0\in A$ 使得当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时, $\|K_Nf_\alpha-K_Nf\|<\varepsilon/3$, 于是

$$\begin{aligned}\|Kf_\alpha-Kf\|\leqslant&\|(K-K_N)f_\alpha\|\\&+\|K_Nf_\alpha-K_Nf\|\\&+\|(K_N-K)f\|\\\leqslant&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

由命题 5.6 知 K 是紧算子. 从而 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 的闭包含于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$.

为证 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$ 稠于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 任取 $\mathscr{H}$ 上一个紧算子 K 和其极分解 PV. 由命题 4.73 可知 $\mathscr{H}$ 依 P 的可分约化子空间有个正交分解 $\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus\mathscr{H}_\alpha$. 命 $P_\alpha=P|_{\mathscr{H}_\alpha}$, 它生成个交换 W*- 代数 $\mathfrak{W}_\alpha$. 考虑定理 4.71 建立的扩充函数演算 $L^\infty(\nu_\alpha)\to\mathfrak{W}_\alpha$, 可以认为 ν_α 是 $[0,\|P\|]$ 上正 Borel 测度使 $\nu_\alpha([0,\|P\|]\setminus\sigma(P_\alpha))=0$. 以 χ_ε 记 $[\varepsilon,\|P\|]$ 的特征函数, 它属于 $L^\infty(\nu_\alpha)$ 且 $E_\alpha^\varepsilon=\chi_\varepsilon(P_\alpha)$ 是到 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的投影算子. 定义 $[0,\|P\|]$ 上函数 ψ_ε 使 $\varepsilon\leqslant x\leqslant\|P\|$ 时, $\psi_\varepsilon(x)=1/x$, 而 $0\leqslant x<\varepsilon$ 时, $\psi_\varepsilon(x)=0$, 则算子 $Q_\alpha^\varepsilon=\psi_\varepsilon(P_\alpha)$ 满足 $Q_\alpha^\varepsilon P_\alpha=P_\alpha Q_\alpha^\varepsilon=E_\alpha^\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}\left(\sum_{\alpha\in A}\oplus E_\alpha^\varepsilon\right)&=\operatorname{ran}P\left(\sum_{\alpha\in A}\oplus Q_\alpha^\varepsilon\right)\\&\subseteq\operatorname{ran}P=\operatorname{ran}K,\end{aligned}$$

由引理 5.7 知投影算子 $\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus E_\alpha^\varepsilon$ 是有限秩的. 因此, $P_\varepsilon=P(\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus E_\alpha^\varepsilon)$ 属于 $\mathfrak{LF}(\mathscr{H})$, 从而 $P_\varepsilon V$ 是有限秩算子. 最后我们有

$$\begin{aligned}\|K-P_\varepsilon V\|=&\|PV-P_\varepsilon V\|\\\leqslant&\|P-P_\varepsilon\|=\sup_{\alpha\in A}\|P_\alpha-P_\alpha E_\alpha^\varepsilon\|\\\leqslant&\sup_{\alpha\in A}\sup_{0\leqslant x\leqslant\|P\|}|x-x\chi_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

从而定理得证. ■

注意到上述定理证明的最后一段只用到 K 的值域不含无限维闭线性子空间，所以我们证明了以下结果的剩余部分.

5.10 推论 若 $\mathscr{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, 则 $\mathscr{H}$ 上算子 T 是紧的当且仅当其值域不含无限维闭线性子空间.

5.11 推论 若 $\mathscr{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的最小非零闭双边理想. 进而在 $\mathscr{H}$ 可分时, $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的唯一真闭双边理想.

证明 结合定理 5.9 和命题 5.5 得第一个结论. 为证第二个, 取非紧算子 T. 由推论 5.10 知 T 的值域包含一个无限维闭线性子空间 $\mathscr{M}$, 作闭线性子空间 $\mathscr{N} = T^{-1}(\mathscr{M}) \cap (\ker T)^{\perp}$. 设 $J : \mathscr{N} \to \mathscr{H}$ 是包含映射而 $Q : \mathscr{H} \to \mathscr{M}$ 是正交投影, 作有界算子 $T_0 = QTJ : \mathscr{N} \to \mathscr{M}$, 它可逆, 从而据逆算子定理其逆有界. 可分无限维 Hilbert 空间 $\mathscr{M}$ 至可分无限维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 存在等距同构 V, 则 VT_0 是拓扑同构且

$$I = (VT_0)(VT_0)^{-1} = (VQ)T(JT_0^{-1}V^{-1}).$$

可见, 包含 T 的双边理想都包含 $\mathscr{H}$ 上恒等算子. 这就完成了证明. ■

5.12 例 设 K 是单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上关于平面 Lebesgue 测度平方可积的一个复值函数, 命

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \quad f \in L^2[0,1],$$

则 $\|T_K f\|_2 \leqslant \|K\|_2 \|f\|_2$. 为此用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(T_K f)(x)|^2 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |K(x,y)|^2 \mathrm{d}y \right\} \left\{ \int_0^1 |f(y)|^2 \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \\
&= \|f\|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

从而 T_K 是 $L^2[0,1]$ 上有界算子且

$$\|T_K\| \leqslant \|K\|_2 = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

称 T_K 是以 K 为核的积分算子. 我们下面要证明 T_K 是紧算子.

考察从 $L^2([0,1] \times [0,1])$ 到 $\mathfrak{L}(L^2[0,1])$ 的映射 $\Phi : K \mapsto T_K$, 它是压缩线性变换. 设 $\mathscr{D}$ 是函数代数 $C([0,1] \times [0,1])$ 的线性子空间使其中函数都形如

$$K : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{N} f_i(x)g_i(y),$$

此处 f_i 和 g_i 都是 [0,1] 上连续函数而 N 是正整数. 显然 $\mathscr{D}$ 是 $C([0,1]\times[0,1])$ 的自伴子代数、含常值函数且分离点, 它据 Stone-Weierstrass 定理有一致闭包 $C([0,1]\times[0,1])$. 进而, $\mathscr{D}$ 依 L^2- 范数稠于 $L^2([0,1]\times[0,1])$. 从而 $\mathfrak{L}(L^2[0,1])$ 中 $\Phi(\mathscr{D})$ 的算子范数闭包包含 Φ 的值域.

设 f 和 g 是 [0,1] 上非零连续函数, T 是以 $f(x)g(y)$ 为核的积分算子. 当函数 h 属于 $L^2[0,1]$ 时,

$$(Th)(x)=\int_0^1 f(x)g(y)h(y)\mathrm{d}y=f(x)\left(\int_0^1 g(y)h(y)\mathrm{d}y\right),$$

因此 T 有值域 $\mathbb{C}f$, 便有秩一. 于是 $\Phi(\mathscr{D})$ 中算子便都是有限秩的. 由定理 5.9 得到

$$\begin{aligned}\Phi(L^2([0,1]\times[0,1]))&\subseteq\mathrm{clos}\Phi(\mathscr{D})\\&\subseteq\mathrm{clos}\mathfrak{L}\mathfrak{F}(L^2[0,1])=\mathfrak{L}\mathfrak{C}(L^2[0,1]),\end{aligned}$$

因此每个积分算子 T_K 都是紧的.

在证明了 Fredholm 算子的某些初等事实之后, 我们就能得到紧算子的谱的特性. 若 $\mathscr{H}$ 是有限维的, 则 $\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathscr{H})=\mathfrak{L}(\mathscr{H})$. 因此, 在本章后面部分, 我们设 $\mathscr{H}$ 是无限维的.

5.13 定义　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 称商代数 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathscr{H})$ 为 Calkin 代数. 从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 至 $\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathscr{H})$ 的自然同态记为 π. 对于 $T\in\mathfrak{L}(\mathscr{H})$, 称 $\pi(T)$ 在 Calkin 代数中的谱为 T 的本质谱并记为 $\sigma_e(T)$.

本章后面将会证明这个 Calkin 代数实际上是 C*- 代数, 这个代数在分析的多个部分都相当有用. 我们的兴趣在于它与 Fredholm 算子的联系. 下面有关 Fredholm 算子的定义有利于我们解决问题, 我们将直接证明它与经典定义等价.

5.14 定义　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T 为一个 Fredholm 算子是指 $\pi(T)$ 为 Calkin 代数 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathscr{H})$ 中一个可逆元. 将 $\mathscr{H}$ 上 Fredholm 算子全体记为 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$.

由定义立刻可得以下命题.

5.15 命题　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的开集, 它自伴、在乘法运算下封闭且在紧扰动下不变.

证明　以 Δ 记 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathscr{H})$ 的可逆元群, 它据命题 2.7 是开集. 自然投影 π 连续且 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})=\pi^{-1}(\Delta)$, 因此 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 是开集. 又 π 是可乘的且 Δ 是一个群, $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 便在乘法运算下封闭. 对于 $T\in\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 和紧算子 K, 由 $\pi(T)=\pi(T+K)$ 知 $T+K$ 属于 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$. 取 $S\in\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 及紧算子 K_1 和 K_2 使 $ST=I+K_1$ 且 $TS=I+K_2$. 取共轭知 $\pi(T^*)$ 在 Calkin 代数中有逆元 $\pi(S^*)$, 从而 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 是自伴的. ■

Fredholm 算子的通常特征可得于我们证明下面有关几个线性子空间生成的子空间的引理之后. 多数情形下, Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 生成的

线性子空间

$$\mathscr{M}+\mathscr{N}=\{f+g: f\in\mathscr{M}, g\in\mathscr{N}\}$$

不是闭集 (见习题 3.18), 当然这在其中有一个是有限维时例外.

5.16 引理 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭线性子空间和一个有限维线性子空间, 则它们生成的线性子空间 $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是个闭集.

证明 在必要时以 $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}$ 在 $\mathscr{N}$ 的正交补代替 $\mathscr{N}$, 可设 $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}=\{0\}$. 为证明 $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是闭的, 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 各是 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 中序列使 $\{f_n+g_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛至某 h, 要证 h 属于 $\mathscr{M}+\mathscr{N}$. 我们先证序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是有界的. 否则, 它存在子列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_{n_k}\|=\infty$. 据 $\mathscr{N}$ 中单位球的紧性, 再取个子列后可设 $\{\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\}_{k=1}^\infty$ 逼近 $\mathscr{N}$ 中某个单位向量 e. 于是序列 $\left\{\dfrac{f_{n_k}+g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\right\}_{k=1}^\infty$ 逼近 0, 这样 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}=-e$, 这表示 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 会有公共非零向量 e, 矛盾.

从有限维空间 $\mathscr{N}$ 中有界序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 可以提出一个子列 $\{g_{n_k}\}$, 它收敛至 $\mathscr{N}$ 中某个向量 g. 因 $\{f_{n_k}+g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 收敛至 h, 故 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 收敛至 $\mathscr{M}$ 中某个向量 f. 如此可知 $h=f+g$, 而 h 便属于 $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{H}$. 可见, $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是闭子空间 ■

以下定理包含了 Fredholm 算子的通常定义.

5.17 定理 (Atkinson) Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子 T 是 Fredholm 算子当且仅当其值域 $\operatorname{ran}T$ 是闭集, 其核 $\ker T$ 和其共轭的核 $\ker T^*$ 都是有限维的.

证明 若 T 是 Fredholm 算子, 则有 $\mathscr{H}$ 上一个算子 A 和一个紧算子 K 使 $AT=I+K$. 当向量 f 属于 $I+K$ 的核即 $(I+K)f=0$ 时, $Kf=-f$, 因此

$$\ker T\subseteq\ker AT=\ker(I+K)\subseteq\operatorname{ran}K,$$

由引理 5.8 知 $\ker T$ 是有限维的. 由对称性知 $\ker T^*$ 是有限维的. 进而由定理 5.9 得个有限秩算子 F 使 $\|K-F\|<1/2$. 因此, 对于 $f\in\ker F$, 我们有

$$\begin{aligned}\|A\|\,\|Tf\|\geqslant\|ATf\|&=\|f+Kf\|\\&=\|f+Ff+Kf-Ff\|\\&\geqslant\|f\|-\|Kf-Ff\|\geqslant\|f\|/2,\end{aligned}$$

因此 T 在 $\ker F$ 上是下有界的, 而 $T(\ker F)$ 便是 $\mathscr{H}$ 的闭子空间 (见命题 4.8 的证明). 因

$$\operatorname{ran}T=T(\ker F)+T[(\ker F)^\perp]$$

且 $(\ker F)^\perp$ 是有限维的, 故由引理 5.16 知 T 有闭值域.

反之, 设 T 有闭值域, $\ker T$ 和 $\ker T^*$ 是有限维的. 考察从 $(\ker T)^\perp$ 到 $\operatorname{ran} T$ 的算子 $T_0 : f \mapsto Tf$, 它是一对一的和到上的, 由定理 1.42 知其逆有界, 从而 $\mathscr{H}$ 上有个算子 S 使 f 属于 $\operatorname{ran} T$ 时, $Sf = T_0^{-1}f$; 而 f 与 $\operatorname{ran} T$ 正交时, $Sf = 0$. 设 P_1 和 P_2 各是到 $\ker T$ 和 $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^*$ 上的投影算子, 则 $ST = I - P_1$ 且 $TS = I - P_2$. 因此 $\pi(S)$ 是 $\pi(T)$ 在 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的逆元, 而 T 便是 Fredholm 算子. ■

5.18　正如我们曾经提到过, 上述定理是 Fredholm 算子的经典定义. 本世纪 (译注: 著者指 20 世纪) 早期曾证明, 有几类重要算子都由 Fredholm 算子组成. 而且, 若 T 是 Fredholm 算子, 对于给定的向量 g, 方程 $Tf = g$ 是否可解等价于 g 是否与有限维线性子空间 $\ker T^*$ 正交, 最后, 方程 $Tf = g$ 的解空间是有限维仿射空间.

初想一下, 两个数 $\dim \ker T$ 和 $\dim \ker T^*$ 会反映 T 的重要性质, 事实确是如此. 不过后来发现它们的差更为重要 —— 它在小扰动下不变, 我们将称这个差为经典指标. 后面我们还要引入一个抽象指标. 我们会逐渐证明这两个指标相同.

5.19 定义　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 从其上 Fredholm 算子全体 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到整数全体 $\mathbb{Z}$ 的函数 $j : T \mapsto \dim \ker T - \dim \ker T^*$ 称为经典指标. 对于整数 n, 作集合 $\mathfrak{F}_n = \{T \in \mathfrak{F}(\mathscr{H}) : j(T) = n\}$.

我们首先证明 $\mathfrak{F}_0$ 在紧扰动下不变, 然后我们得到紧算子的经典 Fredholm 二择性.

5.20 引理　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间. 若 T 属于 $\mathfrak{F}_0$ 而 K 属于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 则 $T+K$ 属于 $\mathfrak{F}_0$.

证明　因 T 属于 $\mathfrak{F}_0$, 据命题 4.37 知存在始空间为 $\ker T$ 且终空间为 $\ker T^*$ 的部分等距 V. 当向量 f 属于 $\ker T$ 且向量 g 与 $\ker T$ 正交时, 我们有

$$(T+V)(f+g) = Tg + Vf.$$

因 $\operatorname{ran} T$ 与 $\operatorname{ran} V$ 正交, 故 $(T+V)(f+g) = 0$ 蕴涵 Tg 和 Vf 同时为零, 于是 $f + g = 0$. 因此, $T + V$ 是一对一的, 它又是到上的, 其逆据开映射定理便有界.

取有限秩算子 F 使 $\|K - F\| < \|(T+V)^{-1}\|^{-1}$. 命 $S = T + V + K - F$, 它据命题 2.7 是可逆的. 显然, $T + K$ 是 S 经有限秩算子 $G = F - V$ 扰动而得, 由命题 5.15 知 $T + K$ 是 Fredholm 算子. 再由 $S + G = S(I + S^{-1}G)$ 知

$$\begin{aligned}\ker(S+G) &= \ker(I + S^{-1}G),\\ \ker(S+G)^* &= \ker((I+S^{-1}G)^*S^*)\\ &= S^{*-1}\ker((I+S^{-1}G)^*).\end{aligned}$$

因此 $T+K$ 和 $I+S^{-1}G$ 有相同指标, 证明 $j(I+S^{-1}G)=0$ 即可.

因 $S^{-1}G$ 是有限秩的, 故 $\operatorname{ran}(S^{-1}G)$ 和 $\operatorname{ran}(S^{-1}G)^*$ 都是有限维的, 它们生成的线性子空间 $\mathscr{M}$ 也是有限维的. 显然, $(I+S^{-1}G)\mathscr{M}\subseteq\mathscr{M}$ 且 $(I+S^{-1}G)^*\mathscr{M}\subseteq\mathscr{M}$, 而 $\mathscr{M}^\perp$ 中诸向量 f 使 $(I+S^{-1}G)f=f$ 且 $(I+S^{-1}G)^*f=f$. 定义 $\mathscr{M}$ 上算子 $A:g\mapsto(I+S^{-1}G)g$, 则 $\ker A=\ker(I+S^{-1}G)$ 且 $\ker A^*=\ker(I+S^{-1}G)^*$. 因有限维空间上一个算子与其共轭算子有相同的核空间维数, 因此

$$\dim\ker(I+S^{-1}G)=\dim\ker(I+S^{-1}G)^*,$$

从而 $j(I+S^{-1}G)=0$. ■

在回忆广义本征子空间的定义之后, 我们将证明一个描述紧算子谱性质的定理.

5.21 定义 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 其上算子 T 相对于复数 λ 的广义本征空间$\mathscr{E}_\lambda$ 是满足某个方程 $(T-\lambda I)^nf=0$ 的向量 f 全体 (即 $\bigcup\{\ker(T-\lambda I)^n|n\in\mathbb{Z}^+\}$).

5.22 定理 (Fredholm 二择性) 设 K 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个紧算子, 则 $\sigma(K)$ 是可数的且仅可能以 0 为极限点; 非零 $\lambda\in\sigma(K)$ 都是 K 的重数有限的本征值且 $\overline{\lambda}$ 是 K^* 的重数相同的本征值. 进而, K 相对于 λ 的广义本征空间 $\mathscr{E}_\lambda$ 和 K^* 相对于 $\overline{\lambda}$ 的广义本征空间有相同有限维数.

证明 非零复数 λ 和正整数 n 都使 $(K-\lambda I)^n$ 为可逆算子 $(-\lambda I)^n$ 的紧扰动, 从而据引理 5.20 是指标为 0 的 Fredholm 算子. 因此, $\ker(K-\lambda I)^n$ 与 $\ker(K^*-\overline{\lambda}I)^n$ 有相同有限维数. 非零 $\lambda\in\sigma(K)$ 便是 K 的重数有限的本征值, 而 $\overline{\lambda}$ 是 K^* 的重数相同的本征值.

记 $\mathscr{E}_{\lambda,n}=\ker(K-\lambda I)^n$, 倘能找到正整数 N 使 $\mathscr{E}_{\lambda,N+1}=\mathscr{E}_{\lambda,N}$, 则归纳地知所有 $n>N$ 使 $\mathscr{E}_{\lambda,n}=\mathscr{E}_{\lambda,N}$, 从而 $\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_{\lambda,N}$, 它是有限维的. 否则,

$$\mathscr{E}_{\lambda,1}\subsetneqq\mathscr{E}_{\lambda,2}\subsetneqq\mathscr{E}_{\lambda,3}\subsetneqq\cdots,$$

便有规范正交序列 $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ 使 k_n 属于 $\mathscr{E}_{\lambda,n+1}\ominus\mathscr{E}_{\lambda,n}$. 据 Pythagoras 定理知

$$\|Kk_n\|^2=|\lambda|^2+\|(K-\lambda I)k_n\|^2\geqslant|\lambda|^2.$$

现在, $\mathscr{H}$ 中诸向量 h 都形如 $\sum\limits_{n=1}^\infty(h,k_n)k_n+k_0$ 使 k_0 与 $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ 正交. 据定理 3.25 知

$$\sum_{n=1}^\infty|(h,k_n)|^2\leqslant\sum_{n=1}^\infty|(h,k_n)|^2+\|k_0\|^2=\|h\|^2,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(k_n,h)=0$, 即 $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ 弱收敛至零. 由命题 5.6 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Kk_n\|=0$, 矛盾.

最后为证 $\sigma(K)$ 可数且仅可能以 0 为极限点, 说明 K 的互异本征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛至 0 即可. 取 λ_n 对应的一个本征向量 f_n, 命 $\mathscr{M}_N = \mathrm{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$. 互异本征值的本征向量序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关的, 故 $\mathscr{M}_1 \subsetneqq \mathscr{M}_2 \subsetneqq \mathscr{M}_3 \subsetneqq \cdots$. 取单位向量 $g_n \in \mathscr{M}_n \ominus \mathscr{M}_{n-1}$, 它形如 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, 于是

$$\begin{aligned} Kg_n &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i f_i \\ &= \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) f_i, \end{aligned}$$

从而存在 $h_n \in \mathscr{M}_{n-1}$ 使 $Kg_n = \lambda_n g_n + h_n$. 据 Pythagoras 定理得

$$|\lambda_n|^2 \leqslant (|\lambda_n|^2 \|g_n\|^2 + \|h_n\|^2) = \|Kg_n\|^2.$$

仿本证明的第二段知 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛至零, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Kg_n\| = 0$. 定理得证. ■

5.23 例　我们现在回到一个特殊的积分算子并计算其谱. 设

$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \end{cases}$$

而 V 是依 5.12 定义的 $L^2[0,1]$ 上积分算子 T_K, 这称为 Volterra 积分算子. 由 5.12 节知 V 是紧的. 我们要证明 $\sigma(V) = \{0\}$. 若某个 $\lambda \in \sigma(V)$ 非零, V 便相应有本征函数 f, 即

$$\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \lambda f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|\lambda|\,|f(x)| \leqslant \int_0^x |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_2.$$

因此, 诸 $x_1 \in [0,1]$ 和每个正整数 n 使

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &\leqslant \int_0^{x_1} \frac{|f(x_2)|}{|\lambda|}\mathrm{d}x_2 \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \frac{|f(x_3)|}{|\lambda|^2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2 \\ &\leqslant \cdots \leqslant \frac{\|f\|_2}{|\lambda|^{n+1}} \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n} \mathrm{d}x_{n+1}\cdots\mathrm{d}x_2, \end{aligned}$$

于是 $|f(x)| \leqslant \dfrac{\|f\|_2 x^n}{|\lambda|^{n+1} n!}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|f\|_2 x^n}{|\lambda|^{n+1} n!} = 0$ 知 $f = 0$, 矛盾. 可见非零复数 λ 都不是 V 的本征值, 于是 $\sigma(V) = \{0\}$.

我们离开主题作几点注释.

5.24 定义　称 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T 为一个拟幂零算子是指 $\sigma(T)=\{0\}$. 于是, Volterra 算子是拟幂零紧算子.

5.25 例　设 T 是拟幂零算子, $\mathfrak{A}$ 是由 $\{I,T,(T-\lambda)^{-1}:\lambda\neq 0\}$ 在 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 中生成的交换 Banach 代数. 因 T 只有一个谱点 0, $\mathfrak{A}$ 上非零可乘线性泛函 φ 都满足 $\varphi(T)=0$. 然而, $\mathfrak{A}$ 上可乘线性泛函由其在生成元 T 上的值而定, 因此 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间只由一个 φ 构成. 特别地, 此例说明交换 Banach 代数的 Galfand 表示对研究这类代数几乎没有什么帮助.

我们再回到 Fredholm 算子的研究上来, 下面定义抽象指标.

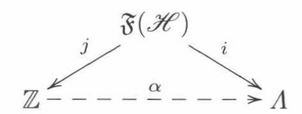
5.26 定义　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, π 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 至 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的自然映射而 γ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的抽象指标. 从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 $\Lambda_{\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})}$ 的映射 $i:T\mapsto\gamma(\pi(T))$ 称为抽象指标.

我们可以立刻得到抽象指标的如下性质.

5.27 命题　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则抽象指标 i 是连续的和可乘的. 进而, 诸 $T\in\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 和诸 $K\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 满足 $i(T+K)=i(T)$.

证明　显然. ■

5.28　我们在 Fredholm 算子全体 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 上定义了两个指标概念: 从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 $\mathbb{Z}$ 的经典指标 j 和从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 $\Lambda_{\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})}$ 的抽象指标 i. 我们的目的是证明这两个概念本质上一样, 即要构造从加法群 $\mathbb{Z}$ 到 Λ 的一个同构 α 使下图交换.



为了得到 α, 我们将证明对于每个 n, $\mathfrak{F}_n=j^{-1}(n)$ 是连通的. 由于 i 连续且 Λ 离散, i 在 $\mathfrak{F}_n$ 上必为常数. 于是对于 $T\in\mathfrak{F}_n$, 可合理地规定 $\alpha(n)=i(T)$. 因为 i 是到上的, 映射 α 也是到上的. 进而考虑一类特殊算子可知 α 是个同态. 最后, $\mathfrak{F}_0$ 在紧扰动下不变的事实将用于证明 $\ker i=\mathfrak{F}_0$ 从而 α 是一对一的.

这个同构一旦建立起来, 就有几个直接推论: j 连续、可乘且在紧扰动下不变.

我们从以下命题开始逐渐实现以上这个规划.

5.29 命题　若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上一个 W*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 的酉算子群是道路连通的.

证明　设 U 是 $\mathfrak{A}$ 中一个酉算子, $\mathfrak{W}_U$ 是其生成的 W*- 代数. 像定理 4.65 的证明一样可得 $\mathscr{H}$ 的一个正交分解 $\sum\limits_{a\in A}\oplus\mathscr{H}_\alpha$ 使诸 $\mathscr{H}_\alpha$ 约化 U 且 $U_\alpha=U|_{\mathscr{H}_\alpha}$ 有个循环向量. 又据定理 4.58, 有个支集含于 $\mathbb{T}$ 的正 Borel 测度 ν_α 和一个从 $L^2(\nu_\alpha)$ 到 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的等距同构确立的 $L^\infty(\nu_\alpha)$ 到 $\mathfrak{W}_U$ 上的函数演算.

作 $\mathbb{T}$ 上一个 Borel 函数 ψ 使当 $-\pi < t \leqslant \pi$ 时 $\psi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = t$, 则 ψ 属于 $L^\infty(\nu_\alpha)$. 用 Stone-Weierstrass 定理逼近在 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : -\pi + \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \pi\}$ 上与 ψ 相等的一个连续函数后得多项式 p_n 使 $\|p_n\| \leqslant \pi$ 且

$$\sup\left\{|p_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - \psi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| : -\pi + \frac{1}{n} < t \leqslant \pi\right\} < \frac{1}{n}.$$

考虑 $\mathfrak{W}_U$ 中算子 $p_n(U) = \sum\limits_{\alpha\in A} \oplus p_n(U_\alpha)$ 和 $\mathscr{H}$ 上算子 $H = \sum\limits_{\alpha\in A} \oplus\psi(U_\alpha)$. 称用 $\mathscr{H}_\alpha$ 到 $L^2(\nu_\alpha)$ 上的那个等距同构, 易证序列 $\{p_n(U_\alpha)\}_{n=1}^\infty$ 依强算子拓扑收敛至 $\psi(U_\alpha)$.

又 $\{\sum\limits_{\alpha\in A} \oplus p_n(U_\alpha)\}_{n=1}^\infty$ 是一致有界算子序列, 它便强收敛至 H, 而 H 属于 $\mathfrak{W}_U$. 诸 $\alpha \in A$ 使 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(U_\alpha)} = U_\alpha$, 故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H} = U$. 于是 [0,1] 中诸数 λ_1 和 λ_2 满足下式

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 H} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 H}\| &= \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 H}(I - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_2-\lambda_1)H})\| \\
&= \sup_{\alpha\in A} \|I_\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_2-\lambda_1)}\psi(U_\alpha)\| \\
&\leqslant \|I - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_2-\lambda_1)}\psi\|_\infty = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2}|,
\end{aligned}$$

因此 [0,1] 至 $\mathfrak{W}_U$ 有连续函数 $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda H}$, 它是连结 I 与 U 的一条道路. ■

现在容易证明以下推论了.

5.30 推论　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则其上可逆算子群是道路连通的.

证明　在可逆算子 $T \in \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的极分解 UP 中, U 是酉算子且 P 是可逆正算子. 取条酉算子道路 $\{U_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant1}$ 使 $U_0 = I$ 且 $U_1 = U$. 因 P_λ 是下有界正算子, 当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时, 可作可逆正算子 $P_\lambda = (1-\lambda)I + \lambda P$, 这是连结 I 和 P 的一条可逆算子道路. 因此 $U_\lambda P_\lambda$ 是连接恒等算子与 T 的一条可逆算子道路. ■

还有一个更强的结论, Kuiper[73] 中有定理表明可数无限维空间 Hilbert 空间上可逆算子群是可缩拓扑空间.

5.31 推论　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, T 是其上一个可逆算子, 则 $i(T)$ 是群 Λ 中恒等元.

证明　因为 $\pi(T)$ 属于 Δ 中恒等算子的连通分支 Δ_0, 显然 $i(T)$ 是 Λ 的恒等元. ■

我们现在考虑 $\mathfrak{F}_n$ 的连通性.

5.32 定理　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则诸 $\mathfrak{F}_n(\mathscr{H})$ 是道路连通的.

证明　由 $(\mathfrak{F}_n(\mathscr{H}))^* = \mathfrak{F}_{-n}(\mathscr{H})$ 知可设 $n \geqslant 0$. 对于 $\mathfrak{F}_n$ 中诸算子 T, 由

$$\dim \ker T \geqslant \dim \ker T^*$$

知存在始空间含于 $\ker T$ 且值域等于 $\ker T^*$ 的部分等距 V. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 有

$$\ker(T + \varepsilon V) = \ker(T) \ominus \operatorname{init}(V)$$

且 $T+\varepsilon V$ 是到上的, 从而它右可逆. 因此, 只需证明使 $\dim\ker S=\dim\ker T$ 的右可逆算子 S 和 T 可由 $\mathfrak{F}_n$ 中一条右可逆算子道路连结起来.

取一个酉算子 U 使 $\ker SU=\ker T$, 取一条酉算子道路 $\{U_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant1}$ 使得 $U_0=I$ 且 $U_1=U$, 则 S 和 SU 在 $\mathfrak{F}_n$ 中通过酉算子道路 $\{SU_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant1}$ 连结. 因此, 只需证明使 $\ker S=\ker T$ 的右可逆算子 S 和 T 可由 $\mathfrak{F}_n$ 中一条右可逆算子道路连结起来.

注意到 $\mathscr{H}$ 和 $(\ker S)^\perp$ 有相同无限维数, 由命题 4.37 知存在等距 W 使

$$\operatorname{ran} W=(\ker S)^\perp=(\ker T)^\perp,$$

故 SW 和 TW 可逆. 据推论 5.30 知存在一条可逆算子道路 $\{J_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant1}$ 使 $J_0=SW$ 且 $J_1=TW$. 因为 WW^* 是到 W 的值域上的投影算子, 我们得到 $SWW^*=S$ 且 $TWW^*=T$, 从而 $J_\lambda W^*$ 是连结 S 和 T 的算子道路. 倘能证明 $J_\lambda W^*$ 属于 $\mathfrak{F}_n$, 定理的证明就完成了. 因 $(J_\lambda W^*)(WJ_\lambda^{-1})=I$, 故 $J_\lambda W^*$ 是右可逆的, 从而 $\ker((J_\lambda W^*)^*)=\{0\}$. 进而, 由 $\ker(J_\lambda W^*)=\ker W^*$, 我们看到诸 λ 使 $j(J_\lambda W^*)=n$. ■

5.33　考察 4.36 节定义的 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上单侧移位U_+, 简单计算可知 $\ker U_+=\{0\}$ 并且 $\ker U_+^*=\{e_0\}$. 既然 U_+ 是等距的, 其值域便是闭的, 因此 U_+ 是 Fredholm 算子且 $j(U_+)=-1$.

定义算子序列 $\{U_+^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $n\geqslant0$ 时, $U_+^{(n)}=U_+^n$; 而 $n<0$ 时, $U_+^{(n)}=U_+^{*-n}$. 当 $n\geqslant0$ 时, $\ker U_+^{(n)}=\{0\}$ 且

$$\ker U_+^{(n)*}=\ker U_+^{*(n)}=\bigvee\{e_0,e_1,\cdots,e_{n-1}\},$$

因此 $j(U_+^n)=-n$. 左式在 $n<0$ 时也成立, 原因是 $U_+^{(n)*}=U_+^{-(n)}$. 下证公式

$$j(U_+^{(m)}U_+^{(n)})=j(U_+^{(m)})+j(U_+^{(n)}):\{m,n\}\subset\mathbb{Z}.$$

上式在证明即将构造出来的映射是同态时会有用. 下面我们一次证明一种情况.

若 $m\geqslant0$ 且 $n\geqslant0$, 或者 $m<0$ 且 $n<0$, 则 $U_+^{(m)}U_+^{(n)}=U_+^{(m+n)}$, 因此

$$j(U_+^{(n)}U_+^{(m)})=-m-n=j(U_+^{(m)})+j(U_+^{(n)}).$$

若 $m<0$ 且 $n\geqslant0$, 则

$$U_+^{(m)}U_+^{(n)}=U_+^{*-m}U_+^n=\begin{cases}U_+^{n-(-m)}=U_+^{(n+m)}, & -m\leqslant n,\\ U_+^{*-m-n}=U_+^{(n+m)}, & -m>n,\end{cases}$$

此时, 要证的公式成立. 最后, 若 $m\geqslant0,n<0$, 由 U_+^m 是等距得

$$\ker U_+^{(m)}U_+^{(n)}=\ker U_+^{*-n}=\bigvee\{e_0,e_1,\cdots,e_{-n-1}\},$$

再由 $[U_+^{(m)}U_+^{(n)}]^* = U_+^{-n}U_+^{*m}$ 且 U_+^{-n} 是等距得

$$\ker[U_+^{(m)}U_+^{(n)}]^* = \ker U_+^{*m} = \bigvee\{e_0, e_1, \cdots, e_{m-1}\},$$

于是

$$j(U_+^{(m)}U_+^{(n)}) = -n - m = j(U_+^{(m)}) + j(U_+^{(n)}).$$

下一引理将用于证明主要定理中诸 $\mathfrak{F}_n$ 都是开集的结论.

5.34 引理　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{F}_0$ 和 $\bigcup\limits_{n\neq 0}\mathfrak{F}_n$ 都是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的开集.

证明　对于 $T \in \mathfrak{F}_0$, 取有限秩算子 F 使 $T + F$ 可逆. 若 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 中算子 X 满足

$$\|T - X\| < \frac{1}{\|(T + F)^{-1}\|},$$

由命题 2.7 的证明知 $X + F$ 可逆, 而由引理 5.20 知 X 属于 $\mathfrak{F}_0$. 因此, $\mathfrak{F}_0$ 是个开集.

若 Fredholm 算子 T 不属于 $\mathfrak{F}_0$, 由引理 5.20 的证明知存在有限秩算子 F 使 $T+F$ 左可逆或右可逆. 由命题 2.7 知存在 $\varepsilon > 0$, 当 $X \in \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 满足 $\|T+F-X\| < \varepsilon$ 时, X 左可逆或右可逆, 但不可逆. 于是 X 是指标非零的 Fredholm 算子, 从而由引理 5.20 知 $X - F$ 也是如此. 可见, $\bigcup\limits_{n\neq 0}\mathfrak{F}_n$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的开集. ■

现在来陈述并证明本章的主要定理.

5.35 定理　若 $\mathscr{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, j 是从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 $\mathbb{Z}$ 的经典指标, i 是从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 Λ 的抽象指标, 则从 $\mathbb{Z}$ 到 Λ 上存在同构 α 使 $\alpha \circ j = i$.

证明　两个 Hilbert 空间 $\mathscr{H} \oplus \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 和 $\mathscr{H}$ 有相同维数, 它们便等距同构. 于是 $\mathscr{H}$ 上存在酉等价于 $I \oplus U_+^{(n)}$ 的算子, 诸 $\mathfrak{F}_n$ 便非空. 由定理 5.32 知对于 $T \in \mathfrak{F}_n$, 可以合理地规定 $\alpha(n) = i(T)$. 由 5.33 中的公式, 我们有

$$\begin{aligned}\alpha(m+n) &= i(I \oplus U_+^{(-m-n)}) = i((I \oplus U^{(-m)})(I \oplus U^{(-n)})) \\ &= i((I \oplus U^{(-m)})i(I \oplus U^{(-n)}) = \alpha(m) \cdot \alpha(n),\end{aligned}$$

从而 α 是同态的. 因为 i 是到上的, 所以 α 也是到上的. 还需证明 α 是一对一的.

先说明 $\pi(\mathfrak{F}_0)$ 与 $\pi(\bigcup\limits_{n\neq 0}\mathfrak{F}_n)$ 不相交, 即若存在 $T \in \mathfrak{F}_0$ 和 $S \in \mathfrak{F}_k$ 使 $\pi(S) = \pi(T)$, 则 $k = 0$. 为此取 $K \in \mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 使 $S + K = T$, 由引理 5.20 得 $j(S) = 0$, 于是 $k = 0$. 又因 π 是开映射, 据引理 5.34 知 $\pi(\mathfrak{F}_0)$ 和 $\pi(\bigcup\limits_{n\neq 0}\mathfrak{F}_n)$ 是不相交的开集. 可见, $\pi(\mathfrak{F}_0)$ 是 Δ 中既开又闭的子集, 从而等于 Δ 含单位元的连通分支 Δ_0. 故 π 将 $\mathfrak{F}_0$ 映满 Δ_0, 而 i 便将 $\mathfrak{F}_0$ 映满 Λ 的恒等元. 于是 α 是个同构. ■

我们现在把前面所证结果总结在以下定理里.

5.36 定理　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 的连通分支全体恰是 $\{\mathfrak{F}_n : n \in \mathbb{Z}\}$. 进而, 经典指标 $j : T \mapsto \dim \ker T - \dim \ker T^*$ 是从 $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ 到 $\mathbb{Z}$ 上的连续同态, 它在紧扰动下不变.

我们现在继续将 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 和 $\mathscr{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 作为 C*- 代数来研究. (严格地说, 没有单位元的 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 依我们的定义不是 C*- 代数.) 这需要我们证明一个 C*- 代数模去一个双边闭理想所得商代数也是 C*- 代数. 这个结论是真的, 但它远不如我们前面证明有关商对象的结论那样平凡. 我们先考虑交换情形的结论, 它将作为我们证明主要结果的引理.

5.37 引理　设 $\mathfrak{A}$ 是交换 C*- 代数, 则 $\mathfrak{A}$ 的闭理想 $\mathfrak{I}$ 都是自伴的且商代数 $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ 依自然映射 π 诱导的对合 $(f+\mathfrak{I})^* = f^* + \mathfrak{I}$ 是 C*- 代数.

证明　鉴于定理 2.35, 可设存在紧 Hausdorff 空间 X 使 $\mathfrak{A} = C(X)$, 以 Z 记 $\mathfrak{I}$ 中诸函数 f 的公共零点全体. 当 $C(X)$ 中某函数 f 在 Z 的某个开邻域 U 上为零时, 任取 $X\backslash U$ 中一点 x, 则 $\mathfrak{I}$ 中存在函数 φ_x 使 $\varphi_x(x) \neq 0$, 于是 φ_x 在 x 的一个开邻域 V_x 上非零. 据 $X\backslash U$ 的紧性, 可取 $\mathfrak{I}$ 中有限个函数 $\varphi_{x_1}, \cdots, \varphi_{x_n}$ 使 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} |\varphi_{x_i}|^2$ 在 $X \setminus U$ 上无零点, 从而下有界. 显然, φ 属于 $\mathfrak{I}$. 可作 $C(X)$ 中函数 g 使 $g|_U = 0$, 且 $\varphi(x) \neq 0$ 时, $g(x) = f(x)/\varphi(x)$. 由 $f = \varphi \cdot g$ 知 f 属于 $\mathfrak{I}$.

我们说明上述 f 全体依最大模范数的闭包为以下理想

$$\mathfrak{I}_Z = \{f \in C(X) | f(x) = 0, x \in Z\}.$$

对于 $\varepsilon > 0$, 取个连续函数 $\eta_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 使

(1) η_ε 在原点的一个邻域上为零,

(2) 诸 $z \in \mathbb{C}$ 使 $|\eta_\varepsilon(z) - z| < \varepsilon$.

任取 $f \in \mathfrak{I}_Z$, 则 $\eta_\varepsilon \circ f$ 在 Z 的某个邻域上为零且 $\|f - \eta_\varepsilon \circ f\| < \varepsilon$. 可见, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_Z$, 而 $C(X)/\mathfrak{I}$ 通过映射 $f + \mathfrak{I} \mapsto f|_Z$ 与 $C(Z)$ 等距同构. ■

我们现在给出商代数的主要结果.

5.38 定理　设 $\mathfrak{A}$ 是 C*- 代数, 则其双边闭理想 $\mathfrak{I}$ 都是自伴的而且商代数$\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ 依自然映射 $\pi : T \mapsto T + \mathfrak{I}$ 诱导的对合 $\pi(T)^* = \pi(T^*)$ 是 C*- 代数.

证明　对于 $T \in \mathfrak{A}$, 作正元 $H = T^*T$. 当 $\lambda > 0$ 时, $(\sqrt{\lambda}H)^2$ 是正的而 $\lambda H^2 + I$ 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆. 命

$$U_\lambda = (\lambda H^2 + I)^{-1} - I = -(\lambda H^2 + I)^{-1}\lambda H^2$$

及 $S_\lambda = TU_\lambda + T$, 则 $S_\lambda^* S_\lambda = (\lambda H^2 + I)^{-2} H$. 用 $\mathfrak{C}_H$ 的函数演算得到

$$\begin{aligned}\|S_\lambda^* S_\lambda\| &= \|(\lambda H^2 + I)^{-2} H\| \\ &= \max_{x \in \sigma(H)} \frac{x}{(\lambda x^2 + 1)^2} \leqslant \frac{9}{16(3\lambda)^{1/2}},\end{aligned}$$

上述最后不等式得于在 $\mathbb{R}$ 上取函数 $x \mapsto \dfrac{x}{(\lambda x^2+1)^2}$ 的最大值. 由 $S_\lambda = TU_\lambda + T$ 知 S_λ 有共轭 $T^* + U_\lambda T^*$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \|T^* + U_\lambda T^*\| &= \lim_{\lambda\to\infty} \|S_\lambda\| \\ &\leqslant \lim_{\lambda\to\infty} \frac{3}{4(3\lambda)^{1/4}} = 0.\end{aligned}$$

在 T 属于 $\mathfrak{J}$ 情形, U_λ 和 $U_\lambda T^*$ 都属于 $\mathfrak{J}$, 因此 T^* 也属于 $\mathfrak{J}$. 这样 $\mathfrak{J}$ 是自伴的而商代数 $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ 中自然映射诱导的对合是等距的：诸 $T \in \mathfrak{A}$ 使 $\|\pi(T)^*\| = \|\pi(T)\|$. 因此

$$\|\pi(T)^*\pi(T)\| \leqslant \|\pi(T)^*\|\,\|\pi(T)\| = \|\pi(T)\|^2.$$

为证上式的反向不等式, 命 $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}_H \cap \mathfrak{J}$, 这是交换 C*- 代数 $\mathfrak{C}_H$ 的自伴双边闭理想. 由上述引理及定理 4.29 知 $\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}$ 是与某个 $C(X)$ 等距同构的 C*- 代数. 考虑 $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ 的子代数 $\pi(\mathfrak{C}_H)$ 的闭包 $\mathfrak{Z}$, 则 $\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}$ 至 $\mathfrak{Z}$ 有诱导同态 $\pi' : A+\mathfrak{K} \mapsto A+\mathfrak{J}$, 而 π' 诱导得连续映射 $\varphi : M_{\mathfrak{Z}} \to X$. 我们说它是到上的. 若不然, X 中有不交的非空开集 U 和 V 使 $\varphi(M_{\mathfrak{Z}}) \subseteq U$. 取 $C(X)$ 中两个非零函数 f 和 g 使 $f|_{\varphi(M_{\mathfrak{Z}})} = 1, \operatorname{supp} f \subseteq U$ 且 $\operatorname{supp} g \subseteq V$. 它们在 $\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}$ 中对应的元素 F 和 G 满足 $FG=0$, 从而 $\pi'(F)\pi'(G) = 0$, 于是 $\pi'(F)$ 不可逆. 但是 $\pi'(F)$ 在 Gelfand 变换下的像是 f 在 $\varphi(M_{\mathfrak{Z}}) \subseteq X$ 上的限制, 它恒等于 1. 这与定理 2.35 矛盾, 从而 φ 是到上的.

因此, 诸 $A \in \mathfrak{C}_H$ 使 $\sigma_{\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}}(A+\mathfrak{K}) = \sigma_{\mathfrak{Z}}(A+\mathfrak{J})$. 鉴于 $\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{Z}$ 为交换 C*- 代数,

$$\begin{aligned}\|A+\mathfrak{K}\|_{\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}} &= r_{\mathfrak{C}_H/\mathfrak{K}}(A+\mathfrak{K}) \\ &= r_{\mathfrak{Z}}(A+\mathfrak{J}) = \|A+\mathfrak{J}\|_{\mathfrak{Z}}.\end{aligned}$$

于是 π' 是等距的且 $\pi'(\mathfrak{C}_H) = \mathfrak{Z}$. 因 $\dfrac{\lambda x^2}{1+\lambda x^2}$ 关于 $x \geqslant 0$ 严格递增, 利用 $\mathfrak{Z}$ 上函数演算得

$$\|\pi(U_\lambda)\| = \lambda\|\pi(H)\|^2(1+\lambda\|\pi(H)\|^2)^{-1}.$$

为了完成证明, 我们使用恒等式 $T = S_\lambda - TU_\lambda$, 注意到 $H = T^*T$ 得到

$$\begin{aligned}\|\pi(T)\| &\leqslant \|\pi(S_\lambda)\| + \|\pi(T)\|\,\|\pi(U_\lambda)\| \\ &\leqslant \frac{3}{4(3\lambda)^{1/4}} + \frac{\lambda\|\pi(T)\|\,\|\pi(T^*T)\|^2}{1+\lambda\|\pi(T^*T)\|^2}.\end{aligned}$$

命 $\lambda = 1/(3\|\pi(T^*T)\|^2)$, 可得 $\|\pi(T)\|^2 \leqslant \|\pi(T)^*\pi(T)\|$, 故 $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ 是 C*- 代数. ■

在本书中, 我们选择只考虑具有单位元的代数. 这是 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 依本书意义不是 C*- 代数的唯一原因. 虽然如此, 我们还是需要有关 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的一些结果, 它们在

C*- 代数的研究中起着根本作用. 称 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的子集 $\mathscr{S}$ 为不可约的是指约化 $\mathscr{S}$ 中诸算子 S 的闭线性子空间只有 $\{0\}$ 和 $\mathscr{H}$. 以下结果有多个重要推论.

5.39 定理 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个不可约 C*- 子代数使 $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{LC}(\mathscr{H})\neq\{0\}$, 则紧算子理想 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 落于 $\mathfrak{A}$.

证明 若 K 是 $\mathfrak{A}$ 中非零紧算子, 则 $K+K^*$ 和 $(K-K^*)/\mathrm{i}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中不全为零的自伴紧算子, 因此 $\mathfrak{A}$ 中有个非零自伴紧算子 H. 取 H 的一个非零本征值 λ, 则据函数演算知到 λ 的本征子空间上的投影算子属于 $\mathfrak{C}_H$, 自然也属于 $\mathfrak{A}$. 由定理 5.22 知这个本征子空间的维数有限, 故 $\mathfrak{A}$ 必包含一个非零有限秩投影算子.

设 E 是 $\mathfrak{A}$ 中秩最小的非零有限秩投影算子. 命 $\mathfrak{A}_E=\{EAE:A\in\mathfrak{A}\}$, 这是 $\mathfrak{A}$ 的一个闭子代数并视为 $\mathfrak{L}(E\mathscr{H})$ 的一个子代数. 注意到 $\mathfrak{A}_E$ 中自伴算子的非零谱投影都落于 $\mathfrak{A}_E$, 也都落于 $\mathfrak{A}$, 因此必等于 E. 这样 $\mathfrak{A}_E$ 由 E 的数乘构成. 为证 E 有秩一, 任取其值域中两个非零向量 x 和 y. 因为 $\{Ax:A\in\mathscr{H}\}$ 的闭包是 $\mathfrak{A}$ 的非零约化子空间, 依条件知它必在 $\mathscr{H}$ 中稠密. 于是 $\mathfrak{A}$ 中有个序列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nx-y\|=0$, 再由 $Ex=x$ 且 $Ey=y$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|EA_nEx-y\|=0$. 序列 $\{EA_nE\}_{n=1}^\infty$ 由 E 的数乘组成, 因此 y 是 x 的数乘. 因此 E 必有秩一.

倘能证明秩一算子都属于 $\mathfrak{A}$, 由定理 5.9 知 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})\subset\mathfrak{A}$. 对于 $\mathscr{H}$ 中非零向量 x 和 y, 作个秩一算子 $T_{y,x}:z\mapsto(z,x)y$. 固定 $E\mathscr{H}$ 中一个单位向量 x_0, 同上取 $\mathfrak{A}$ 中一个序列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nx_0-y\|=0$, 则 $\{A_nT_{x_0,x_0}\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathfrak{A}$ 中序列使 $\lim\limits_{n\to\infty}A_nT_{x_0,x_0}=T_{y,x_0}$. 类似用共轭知 $T_{x_0,x}$ 属于 $\mathfrak{A}$, 从而得 $T_{y,x}=T_{y,x_0}T_{x_0,x}$ 属于 $\mathfrak{A}$. 定理得证. ■

以上结论的一个推论是我们能够确定代数 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的所有表示.

5.40 定理 设 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是两个 Hilbert 空间而 Φ 是 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{K})$ 的一个 *- 同态, 则 $\mathscr{K}$ 有唯一正交分解 $\mathscr{K}_0\oplus\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus\mathscr{K}_\alpha$ 使诸 $\mathscr{K}_\alpha$ 约化 $\Phi(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$, 诸 $T\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的限制 $\Phi(T)|_{\mathscr{K}_0}$ 为零算子, 而 $\mathscr{H}$ 到诸 $\mathscr{K}_\alpha$ 上存在等距同构 U_α 使诸 $T\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 适合 $\Phi(T)|_{\mathscr{K}_\alpha}=U_\alpha TU_\alpha^*$.

证明 若 Φ 不是一对一的, 则 $\ker\Phi$ 是 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的一个非零双边闭理想从而等于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 在这种情况下, Φ 是零同态, 可命 $\mathscr{K}_0=\mathscr{K}$, 定理得证. 以下设 Φ 是一对一的, 从而是等距的.

设 $\{e_i\}_{i\in J}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个规范正交基, P_i 是到 e_i 张成的线性子空间上的投影算子, 作 $\mathscr{K}$ 上投影算子 $E_i=\Phi(P_i)$. 选取 J 中一个特定元 0, 对于 $i\in J$, 定义 $\mathscr{H}$ 上算子 $V_i:\sum\limits_{j\in J}\lambda_je_j\mapsto\lambda_0e_i$. 显然 V_i 是部分等距的使 $V_iV_i^*=P_i$ 且 $V_i^*V_i=P_0$. 于是 $W_i=\Phi(V_i)$ 是 $\mathscr{K}$ 上一个部分等距, $W_i^*W_i=E_0$ 且 $W_iW_i^*=E_i$. 设 $\{x_0^\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 E_0 的值域的一个规范正交基, 命 $x_i^\alpha=W_ix_0^\alpha$. 易见诸 x_i^α 属于 E_i 的值域, 且 $\mathscr{K}$ 有个规范正交集 $\{x_i^\alpha\}_{i\in J,\alpha\in A}$. 以 $\mathscr{K}_\alpha$ 记 $\mathscr{K}$ 中由 $\{x_i^\alpha\}_{i\in J}$ 张成的闭线性子空间, 则子

空间族 $\{\mathscr{K}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 相互正交, 从而我们可以考虑 $\mathscr{K}$ 的闭线性子空间 $\sum_{\alpha\in A}\oplus\mathscr{K}_\alpha$, 其正交补记为 $\mathscr{K}_0$. 我们要证明 $\{\mathscr{K}_\alpha\}_{\alpha\in A\cup\{0\}}$ 具有定理陈述中所要求的性质.

因 $V_iV_j^*$ 是 $\mathscr{H}$ 上秩一算子且将 e_j 映到 e_i, 由 $\{V_i\}_{i\in J}$ 生成的算子范数闭的 *- 代数就是 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$. 于是 $\Phi(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$ 是由 $\{W_i\}_{i\in J}$ 生成的算子范数闭的 *- 代数且有约化子空间 $\mathscr{K}_\alpha$. 从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}_\alpha$ 存在等距同构 U_α 使 $U_\alpha e_i = x_i^\alpha$ 使 $\Phi(T)|_{\mathscr{K}_\alpha} = U_\alpha TU_\alpha^*$. 于是 Φ 在诸 $\mathscr{K}_\alpha$ 上是空间装备的.

最后, 因为诸 $\mathscr{K}_\alpha$ 约化 $\Phi(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$, 所以 $\mathscr{K}_0$ 也是约化子空间. 又因为

$$\left(\sum_{i\in J}E_i\right)\Phi(T)\left(\sum_{i\in J}E_i\right) = \Phi(T) : T\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H}),$$

而 $I-\sum_{i\in J}E_i$ 是到 $\mathscr{K}_0$ 上的投影算子, 可见诸 $T\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 使 $\Phi(T)|_{\mathscr{K}_0}=0$. ■

这个结果在一类更广 C*- 代数上有部分推广.

5.41 推论　设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上包含 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的一个 C*- 代数. 设 Φ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{K})$ 的一个 *- 同态使得 $\Phi|_{\mathfrak{LC}(\mathscr{H})}$ 非零且 $\Phi(\mathfrak{A})$ 不可约, 则从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 上存在等距同构 U 使

$$\Phi(A) = UAU^*,\quad A\in\mathfrak{A}.$$

证明　若 $\Phi(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$ 是可约的, 则由上述定理得 $\mathscr{K}$ 的一个闭线性子空间 $\mathscr{K}'$ 使到 $\mathscr{K}'$ 上的投影算子 P 与 $\Phi(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$ 中诸算子交换且从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}'$ 上存在等距同构 U 使诸 $K\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 满足 $\Phi(K)|_{\mathscr{K}'} = UKU^*$. (否则会导致 $\Phi|_{\mathfrak{LC}(\mathscr{H})}=0$ 的结论.) 对于 $A\in\mathfrak{A}$ 和 $K\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 由 AK 属于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 可得

$$\begin{aligned}[P\Phi(A)-\Phi(A)P]\Phi(K) &= P\Phi(A)\Phi(K)-\Phi(A)\Phi(K)P\\ &= P\Phi(AK)-\Phi(AK)P = 0.\end{aligned}$$

若 $\mathscr{H}$ 上有限秩投影算子的网 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 递增到恒等算子, 则 $\{\Phi(E_\alpha)|_{\mathscr{K}'}\}_{\alpha\in A}$ 强收敛至 P, 从而我们得到 $P\Phi(A)P=\Phi(A)P, A\in\mathfrak{A}$. 因为 $\Phi(\mathfrak{A})$ 是自伴的且假设是不可约的, 这就推出 $\mathscr{K}'=\mathscr{K}$. 最后, 对于 $A\in\mathfrak{A}$ 和 $K\in\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(K)[\Phi(A)-UAU^*] &= \Phi(KA)-(UKU^*)(UAU^*)\\ &= UKAU^*-UKAU^* = 0,\end{aligned}$$

再次使用有限秩投影算子的网我们得到 $\Phi(A)=UAU^*, A\in\mathfrak{A}$. ■

这个结果能使我们确定 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 和 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 各自的 *- 自同构.

5.42 推论　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 Φ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的 *- 自同构当且仅当存在酉算子 $U\in\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 使诸 $A\in\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 满足 $\Phi(A)=UAU^*$.

证明　由前面的推论立刻得到. ■

上述结论中这样的自同构称为内自同构. 因此 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的每个 *- 自同构都是内的. 对于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 来说, 有个类似但又有显著差异的结果.

5.43 推论　设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 Φ 是 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的一个 *- 自同构当且仅当存在酉算子 $U \in \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 使诸 $K \in \mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 满足 $\Phi(K) = UKU^*$.

证明　显然. ■

这种情况的差别是酉算子不属于所考虑的代数, 从而自同构不必是内自同构. 然而, 代数 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 有此性质: 该代数的每个 *- 同构像的 *- 自同构都是由空间上酉算子装备的.

我们下面考察关于 Calkin 代数的一个结果来结束本章.

5.44 定理　若 Φ 是 Calkin 代数 $\mathfrak{L}(H)/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{K})$ 内的一个 *- 同构, 则其值域不是一个 W*- 代数.

证明　否则, 由命题 5.29 知 $\Phi(\mathfrak{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H}))$ 的可逆元群连通, 这与定理 5.36 矛盾. ■

注　记

关于紧算子的最早一些结果隐约地出现在 Volterra 和 Fredholm 关于积分方程的研究中. 紧算子概念由 Hilbert 引入, 但用抽象观点看待紧算子并提炼出所谓 "Fredholm 二择性" 的是 F. Riesz. Noether 对于某些奇异积分算子类的深入研究后引入了指标概念并隐约地引入了 Fredholm 算子类. 这个算子类和 Calkin 代数的联系由 Atkinson[4] 建立. 最后, Gohberg 和 Kreĭn [48] 将 Fredholm 算子理论系统化并推广成差不多现在的模样. Calkin 代数里可逆元分支与指标的联系由 Cordes 和 Labrouse [23] 及 Coburn 和 Lebow [22] 首先建立.

一些更深入的结果以及更多详细的历史评注可参见 Riesz 和 Sz.-Nagy [92], Maurin[79], Goldberg[51], Gohberg 和 Kreĭn 的阐述性文章 [48]. 读者也可参考 Lang[74] 或者 Pa1ais[85] 的风格稍为不同的现代处理方法. 这里再次指出 C*- 代数的结果可在 Dixmier[28] 找到. 定理 5.38 的证明取自 Naimark[80], 引理 5.7 的巧妙简洁证明属于 Halmos[58].

习　题

习题 5.1　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 其上算子 T 是紧的当且仅当 $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 是紧的.

习题 5.2　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规紧算子, 则有列复数 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 和相互正交的有限秩投影算子列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ 且 $\lim\limits_{N\to\infty} \|T - \sum\limits_{n=1}^N \lambda_n E_n\| = 0$.

习题 5.3　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 在 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 中是强算子稠密的.

习题 5.4　若 $\mathscr{H}$ 是维数大于 1 的 Hilbert 空间, 则 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的换位子理想是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$.

习题 5.5　若 K_1 和 K_2 是 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 中复值函数, 而 T_1 和 T_2 分别是以他们为核的 $L^2[0,1]$ 上积分算子, 证明 T_1^* 和 T_1T_2 也是积分算子, 确定他们的核.

习题 5.6　证明对于 $L^2[0,1]$ 上每个有限秩算子 F, 存在核 $K\in L^2([0,1]\times[0,1])$ 使得 $F=T_K$.

习题 5.7　若 T_K 是以 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 中函数 K 为核的 $L^2[0,1]$ 上一个积分算子, 并且函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0,1]$ 的一个规范正交基, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(T_Kf_n,f_n)|^2$ 收敛至 $\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (提示：考虑将 K 作为 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 的元并依规范正交基 $\{f_n(x)f_m(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ 展开.)

习题 5.8　说明 $L^2[0,1]$ 上紧算子不都是核属于 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 的积分算子.

习题 5.9(Weyl)　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个正规算子且 K 是 $\mathscr{H}$ 上一个紧算子. 若复数 λ 属于 $\sigma(T)$ 但不属于 $\sigma(T+K)$, 则 λ 是 T 的重数有限的孤立本征值.

习题 5.10　若 T 是 $\mathscr{H}$ 上拟幂零算子使 $T+T^*$ 属于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$, 则 T 属于 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$.

习题 5.11　若 T 是 $\mathscr{H}$ 上算子使 $\mathscr{H}/\mathrm{ran}T$ 的代数维数有限, 则 T 有闭值域.*

习题 5.12　若 T 是 $\mathscr{H}$ 上算子, 则使 $T-\lambda I$ 非 Fredholm 算子的 λ 构成非空紧集.

习题 5.13(Gohberg)　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个 Fredholm 算子, 命 $\alpha=\dim\ker(T-\lambda I)$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使 α 在 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 上是常值且 $\alpha\leqslant\dim\ker T$. *(提示: 设 $\mathscr{L}$ 是 T 的非零本征值对应的本征向量张成的闭线性子空间, 对充分小的 λ, $(T-\lambda I)|_{\mathscr{L}}$ 是右可逆的且 $\ker(T-\lambda I)\subseteq\mathscr{L}$.)

习题 5.14　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个算子使 $T-\lambda I$ 为 Fredholm 算子的复数 λ 全体是复平面的一个开集, 除了使 $\dim\ker(T-\lambda I)$ 增大的孤立点外, 此开集上函数 $\dim\ker(T-\lambda I)$ 是局部常值的.

习题 5.15　若 H 是 $\mathscr{H}$ 上自伴算子, K 是 $\mathscr{H}$ 上紧算子, 则 $\sigma(H+K)\backslash\sigma(H)$ 由 T 的重数有限的孤立本征值构成.

习题 5.16　若 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, π 是从 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 到 Calkin 代数 $\mathscr{L}(\mathscr{H})/\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 的自然映射. 设 T 是 $\mathscr{H}$ 上一个算子, 则 $\pi(T)$ 是自伴的当且仅当存在自伴算子 H 和一个紧算子 K 使 $T=H+K$, 而 $\pi(T)$ 是酉算子当且仅当 T 形如 $V+K$ 使 K 是紧的而 V 或 V^* 是等距且 $I-VV^*$ 或 $I-V^*V$ 是有限秩的. 若 $\pi(T)$ 是正规的,

我们能说些什么呢? **①

习题 5.17(Weyl-von Neumann) 若 H 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个自伴算子, 则 $\mathscr{H}$ 上有自伴紧算子 K 使 $H+K$ 的某些本征向量构成 $\mathscr{H}$ 的一个规范正交基. * (提示: 证明对于每个向量 $x\in\mathscr{H}$, 有小范数有限秩算子 F 使 $H+F$ 具有有限维约化子空间, 该空间几乎包含 x, 重复这一过程去逼近全空间.)

习题 5.18 若 U 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个酉算子, 则 $\mathscr{H}$ 上有紧算子 K 使 $U+K$ 是酉算子且 $\mathscr{H}$ 有规范正交基, 它由 $U+K$ 的本征向量组成.

习题 5.19 若 U_+ 是空间 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上单侧移位, 则对于可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上每个酉算子 V, 在空间 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上有紧算子 K 使 U_++K 与 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)\oplus\mathscr{H}$ 上算子 $U_+\oplus V$ 酉等价. *(提示: 考虑 $\mathscr{H}$ 是有限维且再要求 K 具有小范数的情形, 并用上题结论去处理一般情形.)

习题 5.20 设 V_1 和 V_2 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上两个等距, 其中至少有一个不是酉算子, 则 V_1 的某个紧扰动与 V_2 酉等价当且仅当 $\dim\ker V_1^*=\dim\ker V_2^*$.

定义 称 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 上一个线性泛函 φ 为一个态是指诸 $A\in\mathfrak{A}$ 满足 $\varphi(A^*A)\geqslant 0$ 且 $\varphi(I)=1$.

习题 5.21 若 φ 是 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 上一个态, 命 $(A,B)=\varphi(B^*A)$, 它除了 $(A,A)=0$ 推不出 $A=0$ 外, 具有内积的性质. 进而 φ 连续且有范数 1.

习题 5.22 若 φ 是 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 上一个态, 则 $\mathscr{R}=\{A\in\mathfrak{A}:\varphi(A^*A)=0\}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的闭的左理想. 而且, φ 诱导了商空间 $\mathfrak{A}/\mathscr{R}$ 上内积使诸 $B\in\mathfrak{A}$ 都定义了这个商空间上一个有界算子 $\pi(B):A+\mathscr{R}\mapsto BA+\mathscr{R}$. 若记 $\pi_\varphi(B)$ 是该算子在这个商空间的完备化 $\mathscr{H}_\varphi$ 上的连续扩张, 则 π_φ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H}_\varphi)$ 的一个 *- 同态.

习题 5.23 若 $\mathfrak{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$ 上以单位向量 f 为循环向量的一个 C*- 代数, 则其上存在态 $\varphi:A\mapsto(Af,f)$. 而且, 若 π_φ 是由 φ 给出的 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathscr{K}_\varphi$ 上的表示, 则从 $\mathscr{H}_\varphi$ 到 $\mathscr{K}$ 上存在等距同构 ψ 使 $A=\psi\pi_\varphi(A)\psi^*$.

习题 5.24(Kreĭn) 若 $\mathscr{L}$ 是 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 的含有恒等元的一个自伴线性子空间, φ_0 是 $\mathscr{L}$ 上一个正线性泛函 (即当 $A\geqslant 0$ 时, $\varphi_0(A)\geqslant 0$) 且 $\varphi_0(I)=1$, 则 φ_0 能扩张成 $\mathfrak{A}$ 上一个态 φ. (提示: 用 Hahn-Banach 定理扩张 φ_0 到 φ, 并且证明 φ 是正的.)

习题 5.25 若 $\mathfrak{A}$ 是 C*- 代数, 则对于每个 $A\in\mathfrak{A}$ 有 $\mathfrak{A}$ 上一个态使 $\varphi(A^*A)=$

---

① 这个问题因对于 C*- 代数扩张的基础研究而获解决 (参见习题 7.27—7.32). 在紧扰动意义下, 本质正规即使 $\pi(T)$ 正规的算子 T 的一个模型是某些像 Toeplitz 算子的直和, 其中每个算子作用于一个平面区域上解析函数相对于面积测度定义的内积所成的 Hilbert 空间. 这个结果是 (R. G. Douglas) 与 L. G. Grown 和 P. A. Fillmore 一起得到的, 见于文章 [Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, *Proc. Conf. on Operator Theorey*, Springer-Verlag Lecture Notes 345, 58-128 (1973)]. 此文中还证明了一个本质正规算子 T 形如一个正规算子 N 和一个紧算子 K 之和 $T+K$ 当且仅当使 $T-\lambda I$ 为 Fredholm 算子的诸复数 λ 使 $\operatorname{ind}(T-\lambda I)=0$.

$\|A\|^2$. (提示：首先考虑 A^*A 生成的交换子代数.)

习题 5.26　若 $\mathfrak{A}$ 是 C*- 代数, 则存在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 和从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个等距 *- 同态 π. 而且, 若 $\mathfrak{A}$ 依范数拓扑可分, 则 $\mathscr{H}$ 可以选择为可分的. (提示：对于每个 $A \in \mathfrak{A}$, 寻找 $\mathfrak{A}$ 的一个表示 π_A 使 $\|\pi_A(A)\| = \|A\|$, 并考虑直和.)

习题 5.27　每个 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 的态全体是 $\mathfrak{A}$ 的对偶的一个弱 *- 紧凸集. 而且, 一个态 φ 是态全体的端点当且仅当 $\pi_\varphi(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathscr{H}_\varphi)$ 的不可约子集. 这种态称为纯态.

习题 5.28　若 $\mathfrak{A}$ 是具有对合的 Banach 代数, 没有单位元, 但诸 $T \in \mathfrak{A}$ 满足 $\|T^*T\| = \|T\|^2$, 则直和 $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ 上有唯一范数使之成为一个 C*- 代数且 $\mathfrak{A} \oplus 0$ 是其闭理想. (提示：考虑 $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ 作用在 $\mathfrak{A}$ 上的算子范数.)

习题 5.29　证明 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H}) \oplus \mathbb{C}$ 除 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H}) \oplus 0$ 外没有真闭双边理想. (提示：假设 $\mathfrak{I}$ 是这样一个理想, 证明由习题 5.6 给出 $(\mathfrak{LC}(\mathscr{H}) \oplus \mathbb{C})/\mathfrak{I}$ 的表示与定理 5.40 矛盾.)

第 6 章　Hardy 空间

6.1　为了下一章研究 Toeplitz 算子的需要, 本章中我们将研究 Hardy 空间 H^1, H^2 和 H^∞ 的许多基本性质. 由于这一主题已有许多杰出的研究 (见本章最后的注记), 我们不期望作出一个包罗万象的讨论, 而将利用我们已介绍过的方法逐步展开.

我们开始回顾前几章中某些相关定义. 对于整数 n, 定义 $\mathbb{T}$ 上函数 $\chi_n : \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. 对于 $p = 1, 2, \infty$, 定义 Hardy 空间如下:

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 0, n > 0 \right\}.$$

易见每个 H^p 是相应于 $L^p(\mathbb{T})$ 的一个闭线性子空间, 因而是 Banach 空间. 又知 $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的一个规范正交基, 故 H^2 是解析三角多项式 $\mathscr{P}_+$ 依 L^2- 范数的闭包. 我们已知 $\mathscr{P}_+$ 在 $C(\mathbb{T})$ 的闭包为圆盘代数 A, 后者的极大理想空间是闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$. 最后回顾将 $L^\infty(\mathbb{T})$ 表示到 $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{T}))$ 所需的同态 $\varphi \mapsto M_\varphi$, 此处乘法算子 M_φ 定义为 $f \mapsto \varphi f$.

我们先介绍以下结果, 它将用于证明 H^∞ 为一个代数.

6.2 命题　若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 H^2 为 M_φ 的一个不变子空间当且仅当 φ 属于 H^∞.

证明　若 $M_\varphi H^2$ 含于 H^2, 则由 1 属于 H^2 知 $\varphi \cdot 1$ 属于 H^2, 于是 φ 属于 H^∞. 反之, 若 φ 属于 H^∞, 任取 $\mathscr{P}_+$ 中函数 $p = \sum\limits_{j=0}^{N} \alpha_j\chi_j$, 则 $n > 0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} (\varphi p)\chi_n \mathrm{d}\theta = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \int_0^{2\pi} \varphi\chi_{j+n}\mathrm{d}\theta = 0,$$

因此 $\varphi\mathscr{P}_+ \subset H^2$. 最后, 因 $\mathscr{P}_+$ 有闭包 H^2, 我们知 φH^2 落于 H^2. 这正是我们要证明的. ■

6.3 推论　空间 H^∞ 为一代数.

证明　若 φ 和 ψ 均属于 H^∞, 则由上述命题得

$$M_{\varphi\psi}H^2 = M_\varphi(M_\psi H^2) \subseteq M_\varphi H^2 \subseteq H^2.$$

再由上述命题知 $\varphi\psi$ 属于 H^∞. 这表明 H^∞ 为一个代数. ■

下列结果本质上是 $\mathbb{T}$ 上测度的 Fourier-Stieltjes 变换的唯一性定理.

6.4 定理　若 μ 是 $\mathbb{T}$ 上复值 Borel 测度且诸整数 n 使 $\int\limits_{\mathbb{T}} \chi_n \mathrm{d}\mu = 0$, 则 $\mu = 0$.

证明　由于函数族 $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的线性包在 $C(\mathbb{T})$ 中是一致稠密的且 $C(\mathbb{T})$ 的对偶空间为复值 Borel 测度空间 $M(\mathbb{T})$, 因此测度 μ 代表零泛函, 从而必是零测度. ■

6.5 推论　若 f 为 $L^1(\mathbb{T})$ 中一个函数且诸整数 n 使

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 0,$$

则 $f = 0$ a.e.

证明　作 $\mathbb{T}$ 上一个 Borel 测度 $\mu : E \mapsto \int\limits_E f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$, 我们的假设就变成诸整数 n 使 $\int\limits_{\mathbb{T}} \chi_n \mathrm{d}\mu = 0$, 因此由上述结果知 $\mu = 0$, 亦即 $f = 0$ a.e. ■

6.6 推论　若 f 为 H^1 中一个实值函数, 则存在实数 α 使 $f = \alpha$ a.e.

证明　命 $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$, 则 α 是实数且当 $n \geqslant 0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} (f-\alpha)\chi_n \mathrm{d}\theta = 0,$$

注意到 $f - \alpha$ 为实值函数, 对上述等式取复共轭得

$$\int_0^{2\pi} (f-\alpha)\overline{\chi}_n \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (f-\alpha)\chi_{-n} \mathrm{d}\theta = 0.$$

将上述两组等式合并知诸整数 n 使

$$\int_0^{2\pi} (f-\alpha)\chi_n \mathrm{d}\theta = 0.$$

于是 $f = \alpha$ a.e. ■

6.7 推论　若 f 和 $\overline{f}$ 均属于 H^1, 则存在复数 α 使 $f = \alpha$ a.e.

证明　由假设, 实值函数 $\dfrac{1}{2}(f+\overline{f})$ 和 $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(f-\overline{f})$ 均属于 H^1 中, 由推论 6.6 知本命题为真. ■

现在我们考虑去刻画某些酉算子的不变子空间. 它是不变子空间问题在某个特殊情形下的 Beurling 型结果, 后者带动了函数代数方面的许多现代研究, 特别是对于 Hardy 空间领域的近期研究兴趣.

6.8 定理　若 μ 为 $\mathbb{T}$ 上一个正 Borel 测度, 则 $L^2(\mu)$ 的一个闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 满足 $\chi_1\mathscr{M} = \mathscr{M}$ 当且仅当 $\mathbb{T}$ 有 Borel 子集 E 使

$$\mathscr{M} = L^2_E(\mu) = \{f \in L^2(\mu) : f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \notin E\}.$$

证明 若 $\mathscr{M} = L^2_E(\mu)$, 则显然 $\chi_1\mathscr{M} = \mathscr{M}$. 反之, 若 $\chi_1\mathscr{M} = \mathscr{M}$, 则

$$\mathscr{M} = \chi_{-1}\chi_1\mathscr{M} = \chi_{-1}\mathscr{M},$$

因此 $\mathscr{M}$ 为 $L^2(\mu)$ 上算子 M_{χ_1} 的一个约化子空间. 于是, 若以 F 记 $L^2(\mu)$ 到 $\mathscr{M}$ 上的投影算子, 则根据命题 4.42 知 F 与 M_{χ_1} 交换, 因而诸 $\varphi \in C(\mathbb{T})$ 使 M_φ 与 F 交换. 至此, 综合推论 4.53、命题 4.22 和命题 4.51 得个 $\varphi \in L^\infty(\mu)$ 使 $F = M_\varphi$, 故定理的结论为真. ■

空间 H^2 在一般理论中的角色可由以下对于 M_{χ_1} 的简单不变子空间的刻画看清楚.

6.9 定理 设 μ 为 $\mathbb{T}$ 上一个正 Borel 测度, 则 $L^2(\mu)$ 的一个非平凡闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 满足 $\chi_1\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$ 和 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M} = \{0\}$ 当且仅当存在 Borel 函数 φ 使 $|\varphi|^2\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 且 $\mathscr{M} = \varphi H^2$.

证明 若 Borel 函数 φ 满足 $|\varphi|^2\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$, 则诸 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 使

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi f|^2 \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 \mathrm{d}\theta = \|f\|_2^2.$$

因此从 $L^2(\mathbb{T})$ 至 $L^2(\mu)$ 存在等距算子 $\Psi : f \mapsto \varphi f$, 它将 H^2 映为 $L^2(\mu)$ 的一个闭线性子空间 $\mathscr{M}$. 由等式 $\chi_1(\Psi f) = \Psi(\chi_1 f)$ 知 $\mathscr{M}$ 在 M_{χ_1} 的作用下不变. 最后, 我们有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M} = \Psi[\bigcap_{n\geqslant 0} \chi_n H^2] = \{0\}.$$

因而 $\mathscr{M}$ 为 M_{χ_1} 的一个简单不变子空间.

反之, 设 $\mathscr{M}$ 为 M_{χ_1} 的一个非平凡不变闭子空间使 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M} = \{0\}$. 因 $L^2(\mu)$ 上乘法算子 M_{χ_1} 是等距的, 故 $\mathscr{L} = \mathscr{M} \ominus \chi_1\mathscr{M}$ 是非平凡的且$\chi_n\mathscr{L} = \chi_n\mathscr{M} \ominus \chi_{n+1}\mathscr{M}$. 因此子空间 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \oplus\chi_n\mathscr{L}$ 含于 $\mathscr{M}$ 且易知 $\mathscr{M} \ominus (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \oplus\chi_n\mathscr{L})$ 等于 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M}$, 亦即为 $\{0\}$.

任取 $\mathscr{L}$ 中单位向量 φ, 则 φ 正交于 $\chi_n\mathscr{M}$, 故正交于 $\chi_n\varphi \quad (n > 0)$. 这样我们得到

$$0 = (\varphi, \chi_n\varphi) = \int_{\mathbb{T}} |\varphi|^2 \chi_{-n} \mathrm{d}\mu, n > 0.$$

结合定理 6.4 和推论 6.6 知 $|\varphi|^2\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. 若 $\mathscr{L}$ 中有单位向量 φ' 与 φ 正交, 则下式

$$0 = (\chi_n\varphi, \chi_m\varphi') = \int_{\mathbb{T}} \varphi\overline{\varphi}'\chi_{n-m} \mathrm{d}\mu$$

对于 $n \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 0$ 成立. 据定理 6.4 知 $\varphi\overline{\varphi}'\mathrm{d}\mu = 0$. 结合等式 $|\varphi|^2\mathrm{d}\mu = |\varphi'|^2\mathrm{d}\mu$ 得矛盾. 因此 $\mathscr{L}$ 是一维的. 可见, $\varphi\mathscr{P}_+$ 稠于 $\mathscr{M}$, 于是 $\mathscr{M} = \varphi H^2$. 定理证毕. ∎

由 Beurling 所得上述定理的一种情形将在下述定义后给出.

6.10 定义　称 H^∞ 中一个函数 φ 为内函数是指 $|\varphi| = 1$ a.e.

6.11 推论 (Beurling 定理)　限制 $M_{\chi_1}|_{H^2}$ 记为 T_{χ_1}, 则 H^2 的非平凡闭线性子空间 $\mathscr{M}$ 为 T_{χ_1} 的不变子空间当且仅当存在内函数 φ 使 $\mathscr{M} = \varphi H^2$.

证明　注意到 H^∞ 为一个代数, 若 φ 为一个内函数, 则 $\varphi\mathscr{P}_+$ 含于 H^∞, 因而含于 H^2. 由于 φH^2 是 $\varphi\mathscr{P}_+$ 的闭包, 我们即知 φH^2 是 T_{χ_1} 的一个非平凡不变闭子空间.

反之, 若 $\mathscr{M}$ 为 T_{χ_1} 的一个非平凡不变闭子空间, 则 $\mathscr{M}$ 对于测度 $\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 满足上述定理的假设, 因而存在 Borel 函数 φ 使 $\mathscr{M} = \varphi H^2$ 且$|\varphi|^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. 因此, $|\varphi| = 1$ a.e. 注意到 1 属于 H^2, 故 $\varphi = \varphi \cdot 1$ 属于 H^2. 可见, φ 为一个内函数. ∎

一般地, $L^2(\mu)$ 上算子 M_{χ_1} 的不变子空间不必是上述两个定理所描述的形式, 然而下述结果使我们可将一般情形可归结为这些形式.

6.12 定理　若 μ 为 $\mathbb{T}$ 上一个正 Borel 测度, 则 M_{χ_1} 的闭不变子空间 $\mathscr{M}$ 都有唯一正交分解 $\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2$ 使 $\mathscr{M}_1$ 和 $\mathscr{M}_2$ 为 M_{χ_1} 的不变子空间, $\chi_1\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_1$ 且 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M}_2 = \{0\}$.

证明　记 $\mathscr{M}_1 = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M}$, 则 $\mathscr{M}_1$ 为 M_{χ_1} 的不变闭子空间且满足 $\chi_1\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_1$. 为证明定理的后一部分, 先注意到一个函数 f 属于 $\mathscr{M}_1$ 当且仅当对于每个自然数 n, 都有 $g \in \mathscr{M}$ 使 $f = \chi_n g$. 现命 $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M} \ominus \mathscr{M}_1$, 则 $\mathscr{M}$ 中函数 f 属于 $\mathscr{M}_2$ 当且仅当 f 与诸 $g \in \mathscr{M}_1$ 正交. 因 $0 = (f, g) = (\chi_1 f, \chi_1 g)$ 且 $\chi_1\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_1$, 故 $\chi_1 f$ 属于 $\mathscr{M}_2$, 因而 $\mathscr{M}_2$ 在 M_{χ_1} 的作用下是不变的. 若 f 属于 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \chi_n\mathscr{M}_2$, 则它必属于 $\mathscr{M}_1$, 故 $f = 0$. 至此, 定理得证. ∎

虽然综合前三个定理我们可以完全描述 M_{χ_1} 的不变子空间, 但其叙述将是非常不流畅的, 因而省略.

前面定理对应了等距算子在重数为一情形的某些结构定理 (参见 [66], [58]).

为展示前面这些结果的力量, 作为它们的推论, 我们得到下面一些定理, 而这些定理在本书后面部分很是重要.

6.13 定理 (F. & M. Riesz)　如果 f 为 H^2 中一个非零函数, 则 f 的零点集合 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T} : f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0\}$ 有零测度.

证明　命 $E = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T} : f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0\}$ 且规定

$$\mathscr{M} = \{g \in H^2 : g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in E\}.$$

显然 $\mathscr{M}$ 是 T_{χ_1} 的一个不变闭子空间, 它含 f, 从而是非平凡的. 因此由 Beurling 定理知存在内函数 φ 使 $\mathscr{M} = \varphi H^2$. 由于常值函数 1 在 H^2 中, 因而 φ 在 $\mathscr{M}$ 中, 这表示 E 含于集合 $\{e^{it} \in \mathbb{T} : \varphi(e^{it}) = 0\}$. 注意到 $|\varphi| = 1$ a.e., 定理便得证. ■

6.14 定理 (F. & M. Riesz) 若 ν 为 $\mathbb{T}$ 上一个 Borel 测度使 $\int_{\mathbb{T}} \chi_n d\nu = 0$ 对于 $n > 0$ 成立, 则 ν 是绝对连续的且有 $f \in H^1$ 使 $d\nu = f d\theta$.

证明 以 μ 记 ν 的全变差测度, 则存在 Borel 函数 ψ 使 $d\nu = \psi d\mu$ 且 $|\psi| = 1$ μ-a.e. 以 $\mathscr{M}$ 记 $L^2(\mu)$ 中 $\{\chi_n : n > 0\}$ 张成的闭线性子空间, 则 $n > 0$ 时,

$$(\chi_n, \overline{\psi}) = \int_{\mathbb{T}} \chi_n \psi d\mu = \int_{\mathbb{T}} \chi_n d\nu = 0.$$

因此 $\overline{\psi}$ 在 $L^2(\mu)$ 中正交于 $\mathscr{M}$.

现假设 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2$ 为定理 6.12 所给出的分解. 由定理 6.8 知 $\mathbb{T}$ 存在 Borel 子集 E 使 $\mathscr{M}_1 = L^2_E(\mu)$, 注意到 $\overline{\psi} I_E$ 属于 $\mathscr{M}_1$ 且 $\overline{\psi}$ 正交于 $\mathscr{M}$, 即得

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^2 I_E d\mu = (\overline{\psi}, \overline{\psi} I_E) = 0.$$

可见, $\mathscr{M}_1 = \{0\}$ 且存在 Borel 函数 φ 使 $\mathscr{M} = \varphi H^2$, 再由定理 6.9 有$|\varphi|^2 d\mu = \dfrac{d\theta}{2\pi}$. 因为 χ_1 在 $\mathscr{M}$ 中, 存在 $g \in H^2$ 使 $\chi_1 = \varphi g$ μ-a.e. 因而 $\varphi \neq 0$ μ-a.e. 这样, 我们便知 μ 和 Lebesgue 测度是相互绝对连续的, 存在 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 使 $d\nu = f d\theta$. 定理的假设本身蕴涵 f 属于 H^1, 证毕. ■

事实上, 上述两个定理的陈述可以归结为一个: 一个解析测度与 Lebesgue 测度是相互绝对连续的.

6.15 现在我们转而研究交换 Banach 代数 H^∞ 的极大理想空间 M_∞. 我们先将开圆盘 $\mathbb{D}$ 嵌入 M_∞. 任取 $z \in \mathbb{D}$, 函数 $1/(1 - z e^{-i\theta})$ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 因 H^1 含于 $L^1(\mathbb{T})$, 其上有一个有界线性泛函

$$\varphi_z : f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - z e^{-i\theta}} d\theta.$$

又由于 $1/(1 - z e^{-i\theta}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} z^n$, 这个级数绝对收敛, 我们可知

$$\varphi_z(f) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \overline{\chi}_k d\theta \right).$$

因而, 若 p 为一个解析三角多项式, 则必有 $\varphi_z(p) = p(z)$. 因此 φ_z 在 $\mathscr{P}_+$ 上是一可乘线性泛函. 为证 φ_z 在 H^∞ 上也是可乘的, 我们引下如下引理.

6.16 引理 若 f 和 g 均属于 H^2, 则 fg 属于 H^1 且诸 $z \in \mathbb{D}$ 使 $\varphi_z(fg) = \varphi_z(f)\varphi_z(g)$.

证明　设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为解析三角多项式序列使

$$\lim_{n\to\infty}\|f-p_n\|_2=\lim_{n\to\infty}\|g-q_n\|_2=0.$$

由于两个 L^2- 函数的乘积为一个 L^1- 函数, 我们有

$$\begin{aligned}\|fg-p_nq_n\|_1&\leqslant\|fg-p_ng\|_1+\|p_ng-p_nq_n\|_1\\&\leqslant\|f-p_n\|_2\|g\|_2+\|p_n\|_2\|g-q_n\|_2,\end{aligned}$$

因而 $\lim_{n\to\infty}\|fg-p_nq_n\|_1=0$. 由 p_nq_n 属于 H^1 知 fg 属于 H^1. 又由 φ_z 的连续性得

$$\varphi_z(fg)=\lim_{n\to\infty}\varphi_z(p_nq_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_z(p_n)\lim_{n\to\infty}\varphi_z(q_n)=\varphi_z(f)\varphi_z(g).$$

证毕. ■

有了这些基本预备, 我们现在能够将 $\mathbb{D}$ 嵌至 $\mathscr{M}_\infty$ 中.

6.17 定理　任给 $z\in\mathbb{D}$, 则 φ_z 在 H^∞ 上的限制是 H^∞ 上一个可乘线性泛函, 而且从 $\mathbb{D}$ 到 M_∞ 的映射 $F:z\mapsto\varphi_z$ 是一个嵌入.

证明　由上述引理知 φ_z 在 H^∞ 上的限制是一个可乘线性泛函. 给定 $f\in H^1$, 函数 $\varphi_z(f)$ 对变量 z 是解析的, 故 F 连续. 又由于 $\varphi_z(\chi_1)=z$, 故 F 是一对一的. 又若 M_∞ 中网 $\{\varphi_{z_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ 收敛至 φ_z, 则

$$\lim_{\alpha\in A}z_\alpha=\lim_{\alpha\in A}\varphi_{z_\alpha}(\chi_1)=\varphi_z(\chi_1)=z.$$

因此, F 为一嵌入. ■

今后, 我们将 $\mathbb{D}$ 简单地等同于 M_∞ 的一个子集. 进而, 我们以 $\widehat{f}$ 记 H^∞ 中函数 f 的 Gelfand 变换. 请注意 $\widehat{f}|_{\mathbb{D}}$ 是解析的. 又对于 $f\in H^1$, 我们以 $\widehat{f}$ 记 $\mathbb{D}$ 上函数 $z\mapsto\varphi_z(f)$. 这种对于符号 ^ 的双重用法将不致于引起混淆.

极大理想空间 M_∞ 是相当大和极端复杂的. 有关它的最深刻结果是 Carleson 日冕定理, 即 $\mathbb{D}$ 稠于 M_∞. 尽管这个结果的证明已经在某种意义下被清晰地简化了 (参见 [15], [39]), 但它仍然很难, 在本书中我们将不予考虑. ①

由于 M_∞ 的复杂性, 用 $\widehat{f}$ 去确定 H^∞ 中函数 f 的谱是不可行的, 但由日冕定理知 f 的谱等于 $\widehat{f}(\mathbb{D})$ 的闭包. 幸运的是, 这个结论的直接证明并不困难.

6.18 定理　若 φ 属于 H^∞, 则 φ 在 H^∞ 中可逆当且仅当 $\widehat{\varphi}|_{\mathbb{D}}$ 下有界.

证明　若 φ 在 H^∞ 中可逆, 则 $\widehat{\varphi}$ 在紧集 M_∞ 上无零点, 便存在 $\varepsilon>0$ 使 $\mathbb{D}$ 中诸点 z 满足 $|\widehat{\varphi}(z)|\geqslant\varepsilon$. 反之, 若诸 $z\in\mathbb{D}$ 满足 $|\widehat{\varphi}(z)|\geqslant\varepsilon$, 命 $\psi(z)=1/\varphi(z)$, 则

①T. Wolff 得到一个非常简单的证明, 这进而由 Gamelin 简化 (见 J.Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981).

ψ 在 $\mathbb{D}$ 上解析且 $|\psi| \leqslant 1/\varepsilon$. 观察 Taylor 展式 $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 它在 $\mathbb{D}$ 上收敛. 当 $0 < r < 1$ 时, 我们得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, 便存在函数 $f \in H^2$ 使 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n$.

将 φ 视为 H^2 中函数作正交展开 $\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \chi_n$, 则诸 $z \in \mathbb{D}$ 使 $\widehat{\varphi}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. 而等式 $\widehat{\varphi}(z)\psi(z) = 1$ 即 $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = 1$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}) z^n = 1$. 由幂级数的唯一性得

$$\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > 0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } n = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

因为

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \varphi - \sum_{n=0}^{N} b_n \chi_n \right\|_2 = \lim_{M \to \infty} \left\| f - \sum_{m=0}^{M} a_m \chi_m \right\|_2 = 0,$$

我们得到

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \varphi f - \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \chi_n \right) \left(\sum_{m=0}^{N} a_m \chi_m \right) \right\|_1 = 0,$$

也就是

$$\lim_{N \to \infty} \left\| (\varphi f - 1) + \sum_{n=N+1}^{2N} c_n \chi_n \right\|_1 = 0,$$

此处 $c_n = \sum\limits_{k=n-N}^{N} a_k b_{n-k}$. 因而

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi f \chi_k \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } k \neq 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

故由推论 6.6 即知 $\varphi f = 1$. 还需证 f 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 这源自函数族 $\{|f_r|\}_{r \in (0,1)}$ 有一致上界 $1/\varepsilon$ 及 $\lim\limits_{r \to 1} \|f - f_r\|_2 = 0$, 其中 $f_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. 因此 f 是 φ 在 H^∞ 中之逆. ■

以上证明显得如此复杂是因为我们没有研究 $\mathbb{D}$ 上函数 $\widehat{f}$ 与 $\mathbb{T}$ 上函数 f 之间的精确联系. 对于 H^1 中函数 f 而言, 能够说明几乎所有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$ 使 $\lim\limits_{r \to 1} \widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. 我们不去证明这一关系, 而作为练习留给读者 (参见习题 6.23).

从上述证明的最后一段可见, 若 f 在 H^2 中且 $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{D}$ 上有界, 则 f 属于 H^∞. 我们将给出 H^∞ 中函数可逆性的另一特征, 这将用于下一章, 为此我们先需要下述定义.

6.19 定义 称 H^2 中一个函数 f 为外函数是指 $\operatorname{clos}[f\mathscr{P}_+] = H^2$.

一个等价定义是外函数恰是算子 T_{χ_1} 的循环向量, 此处 T_{χ_1} 为 H^2 上乘以 χ_1 的乘法算子.

6.20 命题 H^∞ 中一个函数 φ 在 H^∞ 中可逆当且仅当它在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中可逆且是外函数.

证明 若 $1/\varphi$ 在 H^∞ 中, 则显然 φ 在 L^∞ 中可逆. 进而, 因

$$\operatorname{clos}[\varphi\mathscr{P}_+] = \varphi H^2 \supset \varphi\left(\frac{1}{\varphi}H^2\right) = H^2,$$

故 φ 是外函数. 反之, 若 $1/\varphi$ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$ 且 φ 是外函数, 则

$$\varphi H^2 = \operatorname{clos}[\varphi\mathscr{P}_+] = H^2.$$

因而存在 $\psi \in H^2$ 使 $\varphi\psi = 1$, 于是 $1/\varphi = \psi$ 在 H^2 中, 从而属于 H^∞, 证毕. ■

特别请注意, 结合上述两个结果我们看到外函数在 $\mathbb{D}$ 上不能有零点. 然而, 作为一个外函数的内在性质比此要精妙得多.

下述结果展示了内函数和外函数的基本用途之一.

6.21 命题 若 f 为 H^2 中一个非零函数, 则有一个内函数 φ 和一个外函数 g 使得 $f = \varphi g$. 进而, f 在 H^∞ 中当且仅当 g 在 H^∞ 中.

证明 命 $\mathscr{M} = \operatorname{clos}[f\mathscr{P}_+]$, 它是 T_{χ_1} 的一个非平凡不变闭子空间, 由 Beurling 定理知它必形如 φH^2, 此处 φ 为某个内函数. 注意 f 属于 $\mathscr{M}$, 故必存在 $g \in H^2$ 使 $f = \varphi g$. 再命 $\mathscr{N} = \operatorname{clos}[g\mathscr{P}_+]$, 再次得到一个内函数 ψ 使 $\mathscr{N} = \psi H^2$. 由包含式

$$f\mathscr{P}_+ = \varphi g\mathscr{P}_+ \subseteq \varphi\psi H^2$$

得

$$\varphi H^2 = \operatorname{clos}[f\mathscr{P}_+] \subseteq \varphi\psi H^2,$$

因此存在 $h \in H^2$ 使 $\varphi = \varphi\psi h$. 由 φ 和 ψ 为内函数得 $\overline{\psi} = h$, 至此根据推论 6.7 知 ψ 为一个常值函数. 因而 $\operatorname{clos}[g\mathscr{P}_+] = H^2$, 即 g 是外函数.

最后, 因 $|f| = |g|$, 即知 f 在 H^∞ 中当且仅当 g 在 H^∞ 中. ■

下面我们将以下述命题的推论来证明一个外函数的模在差一常数因子的意义下唯一确定这个外函数本身.

6.22 命题 设 g 和 h 为 H^2 中函数且 g 为一个外函数, 则 $|h| \leqslant |g|$ 当且仅当 H^2 中存在函数 k 使 $h = gk$ 且 $|k| \leqslant 1$.

证明 若 $h = gk$ 且 $|k| \leqslant 1$, 则显然 $|h| \leqslant |g|$. 反之, 因 g 是外函数, 有列解析三角多项式 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|1 - p_n g\|_2 = 0$. 由 $|h| \leqslant |g|$ 得

$$\begin{aligned}\|hp_n - hp_m\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_n - p_m|^2 |h|^2 \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_n - p_m|^2 |g|^2 \mathrm{d}\theta = \|gp_n - gp_m\|_2^2,\end{aligned}$$

因而 $\{p_n h\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H^2 中一 Cauchy 序列, 它便收敛至 H^2 中某个函数 k 使

$$\|gk - h\|_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \|g\|_2 \|k - p_n h\|_2 + \lim_{n\to\infty} \|gp_n - 1\|_2 \|h\|_2 = 0,$$

这正表示 $gk = h$. 再由 $|p_n h| \leqslant |p_h g|$ 取极限得 $|k| \leqslant 1$. 命题得证. ■

6.23 命题 若 g_1 和 g_2 为 H^2 中外函数使 $|g_1| = |g_2|$, 则存在幺模复数 λ 使 $g_1 = \lambda g_2$.

证明 根据上述结果知 H^2 中有函数 h 和 k 使 $|h| \leqslant 1$ 且 $|k| \leqslant 1$, 以及 $g_1 = hg_2$ 且 $g_2 = kg_1$. 由此得 $g_1 = khg_1$, 由定理 6.13 知 $kh = 1$. 于是 $h = \overline{k}$, 因而 h 和 $\overline{h}$ 均在 H^2 中. 这样由推论 6.7 即知 h 为一常数, 这正是我们要证明的. ■

从多个角度来说, 确定 L^2 中一个非负函数何时能成为 H^2 中函数的模这样一个问题都是有意义的. 尽管这个问题有个简洁漂亮的充分必要条件为答案, 而我们只给出那些我们要用到的几个结果, 其中第一个是阐明这一问题与另一问题的等价性.

6.24 定理 设 f 为 $L^2(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则存在外函数 g 使 $|f| = |g|$ a.e. 当且仅当 $\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+]$ 是 M_{χ_1} 的一个简单不变子空间.

证明 若存在外函数 g 使 $|f| = |g|$ a.e., 则 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中存在幺模函数 φ 使 $f = \varphi g$. 于是

$$\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+] = \mathrm{clos}[\varphi g\mathscr{P}_+] = \varphi \mathrm{clos}[g\mathscr{P}_+] = \varphi H^2,$$

因而 $\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+]$ 是简单不变的.

反之, 若 $\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+]$ 为 M_{χ_1} 的一个简单不变子空间, 则由定理 6.9 得 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个幺模函数 φ 使 $\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+] = \varphi H^2$. 注意 f 在 $\mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+]$ 中, 存在函数 $g \in H^2$ 使得 $f = \varphi g$. 至此, 无论是对于 g 用命题 6.21 或者证明 g 为外函数, 便完成了定理的证明. ■

6.25 推论 设 f 为 $L^2(\mathbb{T})$ 中一函数使 $|f| \geqslant \varepsilon > 0$, 则存在外函数 g 使 $|g| = |f|$.

证明 命 $\mathscr{M} = \mathrm{clos}[f\mathscr{P}_+]$, 则 $M_{\chi_1}\mathscr{M}$ 是集合 $\{fp : p \in \mathscr{P}_+, p(0) = 0\}$ 的闭包.

现计算

$$\begin{aligned}\|f-fp\|_2^2&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2|1-p|^2\mathrm{d}\theta\\&\geqslant\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-p|^2\mathrm{d}\theta\geqslant\varepsilon^2,\end{aligned}$$

因此 f 不属于 $M_{\chi_1}\mathscr{M}$, 而 $\mathscr{M}$ 是简单不变的. 由上述定理得所求的外函数. ■

我们还能利用上述定理去建立 H^2 和 H^1 中函数的联系.

6.26 推论　若 f 为 H^1 中一函数, 则 H^2 中存在函数 g 使 $|g|^2=|f|$ a.e.

证明　若 $f=0$, 则 $g=0$. 若 f 非零, 取 $h\in L^2(\mathbb{T})$ 使 $|h|^2=|f|$. 鉴于上述定理, 只需证明 $\operatorname{clos}[h\mathscr{P}_+]$ 为 M_{χ_1} 的一个简单不变子空间. 否则, 诸 $N>0$ 使 $\chi_{-N}h$ 属于 $\operatorname{clos}[h\mathscr{P}_+]$, 便有解析三角多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_nh-\chi_{-N}h\|_2^2=0$. 因为

$$\begin{aligned}\|\chi_{-N}h-p_nh\|_2^2&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h^2\chi_{-2N}-2h^2p_n\chi_{-N}+h^2p_n^2|\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h^2\chi_{-N}-h^2(2p_n-p_n^2\chi_N)|\mathrm{d}\theta\\&=\|h^2\chi_{-N}-h^2(2p_n-p_n^2\chi_N)\|_1,\end{aligned}$$

可见 $h^2\chi_{-N}$ 属于 $h^2\mathscr{P}_+$ 在 $L^1(\mathbb{T})$ 的闭包 $\operatorname{clos}_1[h^2\mathscr{P}_+]$. 取幺模函数 φ 使 $f=\varphi h^2$, 则

$$\varphi\operatorname{clos}_1[h^2\mathscr{P}_+]=\operatorname{clos}_1[f\mathscr{P}_+]\subseteq H^1,$$

因此诸 $N>0$ 使 $\chi_{-N}f=\varphi(\chi_{-N}h^2)$ 落于 H^1, 这使 $f=0$, 与假设矛盾. 因此 $\operatorname{clos}[h\mathscr{P}_+]$ 是简单不变的. 定理证毕. ■

6.27 推论　若 f 为 H^1 中一个函数, 则 H^2 中有函数 g_1 和 g_2 使 $|g_1|=|g_2|=|f|^{\frac{1}{2}}$ 且 $f=g_1g_2$.

证明　可设 f 非零. 据推论 6.26 知有 H^2 中函数 g 使 $|g|^2=|f|$, 据命题 6.21 取 g 的内外分解后, 可设 g 是外函数. 取列解析三角多项式 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|gp_n-1\|_2^2=0$, 则

$$\begin{aligned}\|fp_n^2-fp_m^2\|_1&\leqslant\|f(p_n-p_m)p_n\|_1+\|f(p_n-p_m)p_m\|_1\\&\leqslant\|gp_n\|_2\|g(p_n-p_m)\|_2+\|gp_m\|_2\|g(p_n-p_m)\|_2,\end{aligned}$$

因此 H^1 中序列 $\{fp_n^2\}_{n=1}^\infty$ 依 L^1- 范数是 Cauchy 序列, 便收敛至 H^1 中某一函数 φ. 必要时取子列, 可设 $\lim\limits_{n\to\infty}(fp_n^2)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ a.e. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(gp_n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=1$ a.e. 可见 $\varphi g^2=f$. 由 F. & M. Riesz 定理知 g 的零点集为一个零集, 结合 $|g^2|=|f|$ a.e.

知 $|\varphi| = 1$ a.e. 于是函数 $g_1 = \varphi g$ 和 $g_2 = g$ 均属于 H^2 且满足 $f = g_1 g_2$ 以及 $|g_1| = |g_2| = (|f|)^{\frac{1}{2}}$. ■

6.28 推论　$\mathscr{P}_+$ 在 $L^1(\mathbb{T})$ 的闭包为 H^1.

证明　设 f 属于 H^1, 则有 H^2 中函数 g_1 和 g_2 使 $f = g_1 g_2$. 分别取解析三角多项序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_1 - p_n\|_2 = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_2 - q_n\|_2 = 0$, 则 $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个解析三角多项序列使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - p_n q_n\|_1 = 0$. ■

有了上述推论, 我们能够确定 Banach 空间 H^1 的对偶了. 叙述此结果之前, 我们回顾符号 H_0^p, 它表示 H^p 的下述闭线性子空间

$$\left\{ f \in H^p : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \mathrm{d}\theta = 0 \right\}, \quad p = 1, 2, \infty.$$

6.29 定理　在 $(H^1)^*$ 和 $L^\infty(\mathbb{T})/H_0^\infty$ 之间有自然等距同构.

证明　因 H^1 含于 $L^1(\mathbb{T})$, 诸 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 诱导 H^1 上一个有界线性泛函

$$\Psi(\varphi) : f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi f \mathrm{d}\theta.$$

这样我们得到从 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $(H^1)^*$ 的一个压缩映射 Ψ. 又据 Hahn-Banach 定理和对偶空间 $L^1(\mathbb{T})^*$ 的特征知, 诸 $\Phi \in (H^1)^*$ 对应至少一个 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使 $\|\varphi\|_\infty = \|\Phi\|$ 并且 $\Psi(\varphi) = \Phi$. 因此 Ψ 是到上的且诱导从 $L^\infty(\mathbb{T})/\ker\Psi$ 到 $(H^1)^*$ 上的一个等距同构.

我们必须确定 Ψ 有核 H_0^∞. 若 φ 属于 $\ker\Psi$, 则 $n \geqslant 0$ 时, 由 χ_n 属于 H^1 得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \chi_n \mathrm{d}\theta = [\Psi(\varphi)](\chi_n) = 0,$$

故 φ 属于 H_0^∞. 反之, 若 φ 属于 H_0^∞, 则诸 $p \in \mathscr{P}_+$ 使 $[\Psi(\varphi)](p) = 0$, 由上述推论知 φ 属于 $\ker\Psi$. ■

虽然能证明 $L^1(\mathbb{T})$ 不是一个对偶空间, 但其线性子空间 H^1 却是.

6.30 定理　设 A 是圆盘代数, 在 $(C(\mathbb{T})/A)^*$ 与 H_0^1 之间有自然等距同构.

证明　若 φ 为 H_0^1 中一个函数, 则 $C(\mathbb{T})$ 上线性泛函

$$\Phi : f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi \mathrm{d}\theta$$

是有界的且在圆盘代数 A 上为零. 因而, $C(\mathbb{T})/A$ 上有合理定义的有界线性泛函

$$\Phi_0 : f + A \mapsto \Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi \mathrm{d}\theta,$$

这是 $(C(\mathbb{T})/A)^*$ 中一个元素. 显然, H_0^1 到 $(C(\mathbb{T})/A)^*$ 的映射 $\Psi:\varphi\mapsto\Phi_0$ 是压缩算子.

另一方面, 以 π 为 $C(\mathbb{T})$ 到 $C(\mathbb{T})/A$ 的自然映射. 若 Φ_0 为 $C(\mathbb{T})/A$ 上一个有界线性泛函, 则复合 $\Phi_0\circ\pi$ 确定了 $C(\mathbb{T})^*=M(\mathbb{T})$ 中一个元 ν 使

$$\Phi_0(f+A)=\Phi(f)=\int_{\mathbb{T}} f\mathrm{d}\nu,\quad f\in C(\mathbb{T})$$

且 $\|\nu\|=\|\Phi_0\|$. 特别地, 诸 $g\in A$ 使 $\int_{\mathbb{T}} g\mathrm{d}\nu=0$. 由 F. & M. Riesz 定理知 H_0^1 中存在函数 φ 使

$$\Phi_0(f+A)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\varphi\mathrm{d}\theta,\quad f\in C(\mathbb{T})$$

且 $\|\varphi\|_1=\|\nu\|=\|\Phi_0\|$. 因此, 映射 Ψ 是 H_0^1 到 $(C(\mathbb{T})/A)^*$ 上一个等距同构. ■

6.31 仿定理 6.29 知 $(H_0^1)^*$ 至 $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty$ 有自然等距同构, 注意到 $C(\mathbb{T})/A$ 至其二次对偶 $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty$ 的自然映射 (见习题 1.15) 为 $i:f+A\mapsto f+H^\infty$. 由于这个自然映射是等距算子, 其值域 $i[C(\mathbb{T})/A]$ 是 $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty$ 的一个闭线性子空间. 这个闭线性子空间在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty$ 的自然映射下的原像是线性子空间 $H^\infty+C(\mathbb{T})$, 它便是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的闭线性子空间. 这个证明 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 为闭集的方法源自 Sarason[97].

子空间 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 事实上是一个代数, 而且是介于 H^∞ 和 $L^\infty(\mathbb{T})$ 间一大族闭子代数中之一. 本章余下的大部分将专注于研究这类代数, 我们将以下面逼近定理作为开端.

6.32 定理 当 ψ 和 φ 各取遍 H^∞ 中函数和内函数时, 形如 $\psi\overline{\varphi}$ 的函数构成的集合 $\mathscr{Q}$ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个稠密子代数.

证明 子集 $\mathscr{Q}$ 成为一子个代数的理由在于以下两个恒等式

$$(\psi_1\overline{\varphi_1})(\psi_2\overline{\varphi_2})=(\psi_1\psi_2)(\overline{\varphi_1\varphi_2})$$

和

$$\psi_1\overline{\varphi_1}+\psi_2\overline{\varphi_2}=(\psi_1\varphi_2+\psi_2\varphi_1)(\overline{\varphi_1\varphi_2}).$$

因为 $\mathscr{Q}$ 是线性空间且简单函数全体稠于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 为证明 $\mathscr{Q}$ 稠于 $L^\infty(\mathbb{T})$ 只需证明诸特征函数属于 $\mathrm{clos}_\infty[\mathscr{Q}]$. 为此任取 $\mathbb{T}$ 的可测子集 E, 由推论 6.25 可得 H^2 中一个函数 f 使

$$|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in E,\\ 2, & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\notin E.\end{cases}$$

又 f 有界, 从而属于 H^∞, 因而诸正整数 n 都使 $1+f^n$ 落于 H^∞. 由命题 6.21 可得 $1+f^n$ 的分解 $\varphi_n g_n$ 使 φ_n 为内函数而 g_n 为外函数, 则 g_n 属于 H^∞ 且

$$|g_n| = |1+f^n| \geqslant \frac{1}{2}.$$

由命题 6.21 知 $\dfrac{1}{g_n}$ 在 H^∞ 中, 而函数 $\dfrac{1}{1+f^n} = \dfrac{\overline{\varphi_n}}{g_n}$ 便属于 $\mathscr{Q}$. 算得

$$\lim_{n\to\infty} \|I_E - \frac{1}{1+f^n}\|_\infty = 0,$$

因此 I_E 在 $\mathrm{clos}_\infty[\mathscr{Q}]$ 中. 根据我们前面的说明, $\mathscr{Q}$ 稠于 $L^\infty(\mathbb{T})$. ■

下一步我们证明某种唯一性.

6.33 定理 (Gleason-Whitney) 若 Φ 为 H^∞ 上一个可乘线性泛函, 又 L_1 和 L_2 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上正线性泛函使 $L_1|H^\infty = L_2|_{H^\infty} = \Phi$, 则 $L_1 = L_2$.

证明 任取 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个实值函数 u, 由命题 6.20 和推论 6.25 得 H^∞ 中一个可逆函数 φ 使得 $|\varphi| = \mathrm{e}^u$. 由于 L_1 和 L_2 为正泛函, 我们得

$$|\Phi(\varphi)| = |L_1(\varphi)| \leqslant L_1(|\varphi|) = L_1(\mathrm{e}^u)$$

以及

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right| = \left|L_2\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right| \leqslant L_2\left(\frac{1}{|\varphi|}\right) = L_2(\mathrm{e}^{-u}).$$

将上两式相乘得

$$1 = |\Phi(\varphi)| \left|\Phi\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right| \leqslant L_1(\mathrm{e}^u)L_2(\mathrm{e}^{-u}).$$

于是实直线上非负函数 $\Psi : t \mapsto L_1(\mathrm{e}^{tu})L_2(\mathrm{e}^{-tu})$ 在 $t=0$ 处取到最小值. 据 L_1 和 L_2 的线性和连续性知 Ψ 是一可导函数, 其导数为

$$\Psi'(t) = L_1(u\mathrm{e}^{tu})L_2(\mathrm{e}^{-tu}) - L_1(\mathrm{e}^{tu})L_2(u\mathrm{e}^{-tu}).$$

将 $t=0$ 代入上式得

$$0 = \Psi'(0) = L_1(u)L_2(1) - L_1(1)L_2(u),$$

这正是 $L_1(u) = L_2(u)$, 证毕. ■

6.34 定理 若 $\mathfrak{A}$ 为一个闭代数使 $H^\infty \subseteq \mathfrak{A} \subseteq L^\infty(\mathbb{T})$, 则 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间 $M_{\mathfrak{A}}$ 自然同胚于 M_∞ 的一个子集.

证明 设 Φ 为 $\mathfrak{A}$ 上一个可乘线性泛函, 则 $\Phi|_{H^\infty}$ 为 H^∞ 上一个可乘线性泛函, 因此我们得到从 $M_{\mathfrak{A}}$ 到 M_∞ 的连续映射 $\eta : \Phi \mapsto \Phi|_{H^\infty}$. 进而, 命 Φ' 为 Φ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$

上的任一 Hahn-Banach 扩张. 根据定理 2.64 知 $L^\infty(\mathbb{T})$ 等距同构于 $C(M_{L^\infty})$, 再由 Riesz-Markov 表示定理 (参见 1.38 小节) 知 Φ' 是相对于 M_{L^∞} 上某个正则 Borel 测度 ν 的积分. 因

$$\begin{aligned}\nu(M_{L^\infty}) &= \Phi'(1) = 1\\ &= \|\Phi'\| = |\nu|(M_{L^\infty}),\end{aligned}$$

故 Φ' 为正泛函, 它据上述定理由 $\Phi|_{H^\infty}$ 唯一确定. 所以映射 η 是一对一的, 故为一个嵌入. ■

我们注意 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间包含了 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的极大理想空间, 并且事实上诚如我们在习题中指出的, 后者是 $\mathfrak{A}$ 的 Šilov 边界.

我们现在引入介于 H^∞ 与 $L^\infty(\mathbb{T})$ 之间的几例具体子代数.

6.35 定义 若 Σ 是个包含常值函数 1 的内函数半群, 则 $L^\infty(\mathbb{T})$ 有如下一个子代数

$$\{\psi\overline{\varphi} : \psi \in H^\infty, \varphi \in \Sigma\},$$

其闭包记为 $\mathfrak{A}_\Sigma$.

取闭包之前, 上述集合为代数的论证方法见于定理 6.32 的证明中第一段.

下面我们将看到 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 便是这类代数中一个.

6.36 命题 以 $\Sigma(\chi)$ 记内函数半群 $\{\chi_n : n \geqslant 0\}$, 则 $\mathfrak{A}_{\Sigma(\chi)} = H^\infty + C(\mathbb{T})$.

证明 由 6.31 节知 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 为闭线性子空间, 故

$$H^\infty + C(\mathbb{T}) = \text{clos}_\infty[H^\infty + \mathscr{P}].$$

最后由下式

$$H^\infty + \mathscr{P} = \{\psi\overline{\chi}_n : \psi \in H^\infty, n \geqslant 0\}$$

知命题成立. ■

根据命题 6.34, $\mathfrak{A}_\Sigma$ 的极大理想空间可与 M_∞ 的一个闭子集等同起来, 以下更抽象的结果将使我们具体实现这些子集.

6.37 命题 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $\mathfrak{A}$ 是 $C(X)$ 中一个函数代数, 其极大理想空间为 M. 设 Σ 为 $\mathfrak{A}$ 中某些幺模函数组成的半群. 将代数 $\text{clos}\{\psi\overline{\varphi} : \psi \in \mathfrak{A}, \varphi \in \Sigma\}$ 记为 $\mathfrak{A}_\Sigma$, 其中诸 φ 的 Gelfand 变换记为 $\widehat{\varphi}$. 以 M_Σ 记 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间, 则 M_Σ 等同于以下集合

$$\{m \in M : |\widehat{\varphi}(m)| = 1, \varphi \in \Sigma\}.$$

证明 任取 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 上一个可乘线性泛函 Ψ, 则 $\Psi|_\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 上一个可乘线性泛函, 因而从 M_Σ 到 M 有个连续映射 $\eta:\Psi\mapsto\Psi|_\mathfrak{A}$. 今若 Ψ_1 和 Ψ_2 均是 M_Σ 中元素使 $\Psi_1|_\mathfrak{A}=\Psi_2|_\mathfrak{A}$, 则诸 $\varphi\in\Sigma$ 使

$$\begin{aligned}\Psi_1(\overline{\varphi})&=\Psi_1(\frac{1}{\varphi})=\Psi_1(\varphi)^{-1}\\&=\Psi_2(\varphi)^{-1}=\Psi_2(\overline{\varphi}).\end{aligned}$$

因此 $\Psi_1=\Psi_2$. 所以 η 是 M_Σ 到 M 的一个嵌入. 进而, 由 $|\Psi(\varphi)|\leqslant\|\varphi\|=1$ 及

$$\frac{1}{|\Psi(\varphi)|}=|\Psi(\overline{\varphi})|\leqslant\|\overline{\varphi}\|=1$$

得 $|\Psi(\varphi)|=1$. 因此 η 的值域含于集合 $\{m\in M:|\widehat{\varphi}(m)|=1,\varphi\in\Sigma\}$.

为证上述反包含关系, 任取 $m\in M$ 使 $|m(\varphi)|=1,\varphi\in\Sigma$, 在子代数 $\{\psi\overline{\varphi}:\psi\in\mathfrak{A},\varphi\in\Sigma\}$ 上有合理定义的线性泛函 $\Psi:\psi\overline{\varphi}\mapsto m(\psi)\overline{m(\varphi)}$, 易验证 Ψ 是可乘的, 而不等式

$$\begin{aligned}|\Psi(\psi\overline{\varphi})|&=|m(\psi)||m(\varphi)|=|m(\psi)|\\&\leqslant\|\psi\|_\infty=\|\psi\overline{\varphi}\|_\infty,\end{aligned}$$

表明 Ψ 能扩张成 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 上一个可乘线性泛函使 $\eta(\Psi)=m$, 证毕. ■

6.38 推论 若 Σ 是由某些内函数组成的半群, 则 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 的极大理想空间等同于以下集合

$$\{m\in M_\infty:|\widehat{\varphi}(m)|=1,\varphi\in\Sigma\}.$$

证明 存在紧 Hausdorff 空间 X 使 $L^\infty(\mathbb{T})=C(X)$, 故结论得证. ■

利用 Gleason-Whitney 定理, 我们能在下面意义下来确立 Gelfand 变换.

6.39 定理 设 $\mathfrak{A}$ 是落于 H^∞ 与 $L^\infty(\mathbb{T})$ 之间的一个闭子代数, 则 M_∞ 到 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的对偶空间的单位球存在嵌入 η 使诸 $\psi\in\mathfrak{A}$ 和诸 $\Phi\in M_\mathfrak{A}$ 满足 $\widehat{\psi}(\Phi)=\eta(\Phi|_{H^\infty})(\psi)$.

证明 据定理 6.33 知, M_∞ 中诸元 m 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上有唯一正扩张 $\eta(m)$, 而且 $\mathfrak{A}$ 上诸可乘线性泛函 Φ 和其在 H^∞ 上的限制在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上有相同正扩张, 诸 $\psi\in\mathfrak{A}$ 便使 $\widehat{\psi}(\Phi)=\eta(\Phi|_{H^\infty})(\psi)$. 唯一要证的是 η 的连续性. 注意到 $L^\infty(\mathbb{T})^*$ 的单位球是弱 * 紧的, 设 M_∞ 中网 $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 收敛至 m, 于是 $\{\eta(m_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 的任一子网有个收敛子网, 其极限是 m 的一个正扩张, 因而它必等于 $\eta(m)$. 于是 η 是连续的, 因而是到 $L^\infty(\mathbb{T})^*$ 的单位球的一个闭子集的一个同胚. ■

我们现在采用记号 $\widehat{\varphi}(m)=\eta(m)(\varphi),\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$. 我们将证明限制 $\widehat{\varphi}|_\mathbb{D}$ 与代数 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中函数 φ 在 $\mathbb{D}$ 上的经典调和扩张相等. 我们将通过证明 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 在代数 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的子代数系统中所占有的唯一位置这一结果来阐明上述表示的用处.

6.40 推论 设 $\mathfrak{A}$ 是介于 H^∞ 和 $L^\infty(\mathbb{T})$ 之间的一个闭子代数, 则 $\mathfrak{A}$ 要么等于 H^∞ 要么包含 $H^\infty + C(\mathbb{T})$.

证明 由命题 6.34 知 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间可等同于 M_∞ 的一个子集 $M_{\mathfrak{A}}$. 当 $\mathbb{D}$ 中原点不属于 $M_{\mathfrak{A}}$ 时, 因 $\widehat{\chi_1}$ 无零点, 故 χ_1 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆, 因而 $C(\mathbb{T})$ 含于 $\mathfrak{A}$ 中; 此情形结论得证. 现设 $\mathbb{D}$ 中原点在 $M_{\mathfrak{A}}$ 中, 则 H^∞ 上在原点的赋值泛函在 L^∞ 上有如下正扩张

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi \mathrm{d}t$$

任取 $\mathfrak{A}$ 中函数 φ, 则诸正整数 n 使

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\chi_n \mathrm{d}t = \widehat{\varphi\chi_n}(0) = \widehat{\varphi}(0)\widehat{\chi}_n(0) = 0,$$

从而 φ 属于 H^∞; 此情形结论也得证. ■

人们同样可证明要么 $M_{\mathfrak{A}}$ 含于 $M_\infty\backslash\mathbb{D}$ 要么 $\mathfrak{A} = H^\infty$. 在我们能对 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 说明这一结果之前, 需要以下将零点所在因子分解出来的一个引理.

6.41 引理 设 φ 属于 H^∞ 且 z 属于 $\mathbb{D}$ 使 $\widehat{\varphi}(z) = 0$, 则有个 $\psi \in H^\infty$ 使

$$\varphi = (\chi_1 - z)\psi.$$

证明 任取 $\theta \in H^\infty$, 将 $\theta\varphi$ 视为 H^2 中函数后取其正交展开 $\theta\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n$, 根据 6.15 节得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \widehat{\theta\varphi}(z) = \widehat{\varphi}(z)\widehat{\theta}(z) = 0,$$

因而

$$\left(\theta\varphi, \frac{1}{1-\overline{z}\chi_1}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}^n\chi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0,$$

于是对任意 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_k \frac{\overline{\chi}_1\varphi}{1-z\overline{\chi}_1}\mathrm{d}\theta = \left(\chi_k, \frac{\chi_1\overline{\varphi}}{1-\overline{z}\chi_1}\right) \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi\chi_{k-1}}{1-z\overline{\chi}_1}\mathrm{d}\theta \\ = \left(\chi_{k-1}\varphi, \frac{1}{1-\overline{z}\chi_1}\right) = 0,\end{aligned}$$

可见函数 $\dfrac{\overline{\chi}_1\varphi}{1-z\overline{\chi}_1}$ 在 H^∞ 中. 命 $\psi = \dfrac{\overline{\chi}_1\varphi}{1-z\overline{\chi}_1}$, 则 $(\chi_1 - z)\psi = \varphi$. ■

6.42 推论 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 的极大理想空间可等同于 $M_\infty\backslash\mathbb{D}$.

证明　由命题 6.36 和推论 6.38, $M_{H^\infty+C(\mathbb{T})}$ 等同于 $\{m\in M_\infty:|\widehat{\chi_1}(m)|=1\}$. 证明这集合是 $M_\infty\backslash\mathbb{D}$ 即可. 若 M_∞ 中某 m 使 $|m(\chi_1)|<1$, 命 $z=\widehat{\chi_1}(m)$. 诸 $\varphi\in H^\infty$ 使 $\widehat{\varphi}-\widehat{\varphi}(z)1$ 在点 z 处为零, 由上述引理知存在 $\psi\in H^\infty$ 使 $\widehat{\varphi}-\widehat{\varphi}(z)1=(\widehat{\chi}_1-z)\widehat{\psi}$. 左式在点 m 处赋值得

$$\widehat{\varphi}(m)-\widehat{\varphi}(z)=(\widehat{\chi}_1(m)-z)\widehat{\psi}(m)=0,$$

因而 $\widehat{\varphi}(m)=\widehat{\varphi}(z)$. 这正表示 $m=z$, 得证. ■

在下一章中我们将关注 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中函数何时是可逆的. 就此观点而言, 上节的结果显得有些遗憾, 这是因为 H^∞ 的极大理想空间中让我们有所感觉的那个部分 $\mathbb{D}$ 已经消失. 然而我们将看到 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中函数可逆性问题可通过考察该函数在 $\mathbb{D}$ 上的调和扩张来回答. 我们引入调和扩张的想法与经典想法是相当不同的. 我们下面首先给出 $\widehat{\varphi}$ 在 $\mathbb{D}$ 上更明晰的表示.

6.43 引理　若 $z=re^{i\theta}$ 属于 $\mathbb{D}$, 而 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则

$$\widehat{\varphi}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nr^{|n|}e^{in\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{it})k_r(\theta-t)dt,$$

其中

$$k_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\text{且}a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\chi_{-n}dt.$$

进而, $\|\widehat{\varphi}\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_\infty$.

证明　函数 k_r 是正的且连续的, 又因

$$k_r(t)=\mathrm{re}\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int}.$$

即得

$$\|k_r\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_r(t)dt=1.$$

从而

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{it})k_r(\theta-t)dt\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty\|k_r\|_1=\|\varphi\|_\infty.$$

最后, 诸 $\varphi\in H^\infty$ 使 $\widehat{\varphi}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nr^{|n|}e^{in\theta}$, 这便定义了一个在点 z 处赋值泛函的正扩张. 而 Gleason-Whitney 定理保证这种正扩张的唯一性, 证毕. ■

6.44 引理　从 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 至 $C(\mathbb{D})$ 的映射 $\varphi\mapsto\widehat{\varphi}|_{\mathbb{D}}$ 是渐近可乘的, 即对于 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中函数 φ 和 ψ 及正数 ε, 在 $\mathbb{D}$ 中存在紧集 K 使诸 $z\in\mathbb{D}\backslash K$ 满足以下不等式

$$|\widehat{\varphi}(z)\widehat{\psi}(z)-\widehat{\varphi\psi}(z)|<\varepsilon.$$

证明　据命题 6.35 和命题 6.36, $H^\infty + C(\mathbb{T}) = \operatorname{clos}_\infty[\bigcup_{n\geqslant 0} \chi_{-n}H^\infty]$, 对于形如 $\overline{\chi}_n\varphi(\varphi \in H^\infty)$ 的函数证明结论即可. 考虑 φ 的 Fourier 展开 $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n$, 对于 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{\chi_{-n}\varphi}(z) - \widehat{\chi}_{-n}(z)\widehat{\varphi}(z)| \\
\leqslant &\sum_{k=0}^{n} |r^{|k-n|} - r^{k+n}||a_k| \\
&+ \left(\frac{1}{r^n} - r^n\right)\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\chi_k\right\|_\infty.
\end{aligned}
$$

因此, 适当取 δ 使 $0 < 1 - r < \delta$ 时, 便有 $|\widehat{\chi_{-n}\varphi}(z) - \widehat{\chi}_{-n}\widehat{\varphi}(z)| < \varepsilon$.

当 m 和 n 是负整数而 φ 和 ψ 是 H^∞ 中函数时, 命 $l = m + n$ 且 $\theta = \varphi\psi$, 则

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{\chi_n\varphi}(z)\widehat{\chi_m\psi}(z) - \widehat{\chi_l\theta}(z)| \\
\leqslant &|(\widehat{\chi_n\varphi}(z) - \widehat{\chi_n}(z)\widehat{\varphi}(z))\widehat{\chi_m\psi}(z)| \\
&+ |\widehat{\chi_n}(z)\widehat{\varphi}(z)(\widehat{\chi_m\psi}(z) - \widehat{\chi_m}(z)\widehat{\psi}(z))| \\
&+ |\widehat{\chi_l}(z)\widehat{\theta}(z) - \widehat{\chi_l\theta}(z)| \\
\leqslant &|\widehat{\chi_n\varphi}(z) - \widehat{\chi_n}(z)\widehat{\varphi}(z)|\|\psi\|_\infty \\
&+ \|\varphi\|_\infty|\widehat{\chi_m\psi}(z) - \widehat{\chi_m}(z)\widehat{\psi}(z)| \\
&+ |\widehat{\chi_l}(z)\widehat{\theta}(z) - \widehat{\chi_l\theta}(z)|.
\end{aligned}
$$

以上用到了等式 $\widehat{\chi_n}\widehat{\chi_m} = \widehat{\chi_l}$ 和 $\widehat{\varphi}\widehat{\psi} = \widehat{\theta}$. 由此知引理为真. ■

上述引理也可抽象地证明, 其中紧集 K 用集合 $\{z \in \mathbb{D} : |\widehat{\chi}_1(z)| \leqslant 1 - \delta\}$ 代替. 进而, 类似的结果对于代数 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 亦成立, 这可用来陈述 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 中函数的可逆性标准 (参见 [30], [31]), 其中会用到这些函数在 $\mathbb{D}$ 上调和扩张的述语.

6.45 定理　若 φ 属于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$, 则 φ 可逆当且仅当有正数 δ 和 ε 使 $\delta < 1$ 且

$$|\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \geqslant \varepsilon, \quad 1 - \delta < r < 1.$$

证明　设 φ 在 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中有逆元 φ^{-1}. 由上述引理, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使

$$|\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\widehat{\varphi^{-1}}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - 1| < \varepsilon, \quad 1 - \delta < r < 1.$$

因此只要 ε 足够小 (如 $\varphi < (1 + \|\varphi^{-1}\|_{-\infty})^{-1}$), 即证得必要性.

反之, 设 φ 是 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中函数使

$$|\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{it})| \geqslant \varepsilon > 0, \quad 1 - \delta < r < 1.$$

取 $\psi \in H^\infty$ 和正整数 N 使 $\|\varphi - \chi_{-N}\psi\|_\infty < \varepsilon/3$, 则存在 δ_1 使 $1-\delta_1 < r < 1$ 时恒有

$$|\widehat{\chi_{-N}\psi}(re^{it}) - \widehat{\chi_{-N}}(re^{it})\widehat{\psi}(re^{it})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $1-\delta_1 < r < 1$ 时, 根据引理 6.43 有

$$|\widehat{\varphi}(re^{it}) - r^N e^{-iNt}\widehat{\psi}(re^{it})| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

于是当 $r > 1-\delta$ 时, $|\widehat{\psi}(re^{it})| \geqslant \varepsilon/3$. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $\mathbb{D}$ 上解析函数 $\widehat{\psi}(z)$ 的零点, 并计算了重数. (注意 $\widehat{\psi}$ 在靠近 $\mathbb{D}$ 的边界处无零点, 其零点个数有限). 重复使用引理 6.41 就能找到 $\theta \in H^\infty$ 使 $\psi = p\,\theta$, 此处

$$p = (\chi_1 - z_1)(\chi_1 - z_2)\cdots(\chi_1 - z_n).$$

因 $\widehat{\psi} = \widehat{p}\,\widehat{\theta}$, 故 $\widehat{\theta}$ 在 $\mathbb{D}$ 上无零点且在边界的一个邻域下有界. 至此由定理 6.18 知 θ 在代数 H^∞ 中可逆. 又因 p 在 $C(\mathbb{T})$ 中可逆, 由 $\psi = p\theta$ 知 $\chi_{-N}\psi$ 在 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中可逆.

最后命 $\varphi_r(e^{it}) = \widehat{\varphi}(re^{it})$, 由 $\lim\limits_{r\to 1^-}\|\varphi - \varphi_r\|_2 = 0$ 知 $|\varphi(e^{it})| \geqslant \varepsilon$ a.e. 因而几乎处处 $|(\chi_{-N}\psi)(e^{it})| \geqslant 2\varepsilon/3$. 故 $\|(\chi_{-N}\psi)^{-1}\| < 3/(2\varepsilon)$. 据命题 2.7 知 φ 在 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中可逆. ■

在结束本章前, 我们下面证明 $\mathbb{T}$ 上连续函数的调和扩张回答了经典 Dirichlet 问题.

6.46 定理 若 φ 为 $\mathbb{T}$ 上一个连续函数, 则在 $\mathbb{D}$ 上为 $\widehat{\varphi}$ 而在 $\mathbb{T}$ 上为 φ 的闭圆盘上函数 $\tilde{\varphi}$ 是连续的.

证明 这个结论对于三角多项式 p 是显然的. 今设 φ 是 $\mathbb{T}$ 上一个连续函数, 取三角多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi - p_n\|_\infty = 0$, 根据引理 6.43 知

$$|\tilde{\varphi}(z) - \tilde{p}_n(z)| \leqslant \|\varphi - p_n\|_\infty,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{\varphi} - \tilde{p}_n\| = 0$, 所以 $\tilde{\varphi}$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上是连续的. ■

注 记

关于 Hardy 空间中解析函数的经典文献非常丰富, 我们没有尝试在此给予综述. 某些较早期的和最重要的结果属于 F. Riesz[90] 及 F. & M. Riesz[91]. 然而我们在此提供的证明大部分源自 Helson 和 Lowdenslarger 的工作 [62], 这与经典证明是十分不同的. 这个领域的最好文献是 Hoffman[66] 和 Duren[39] 这两本书; 另外还应提及 Helson[61] 和 Gamelin[40] 这两本书.

诚如正文所言, 泛函分析学家对于 Hardy 空间理论的兴趣主要源自 Beurling [6], 他指明了单侧移位在研究中的作用. F. & M. Riesz 定理出自 [91], 但我们的证明源自 Lowdenslager(未发表) 和 Sarason[99] 的想法. 除了上述 Helson 和 Lowdenslager 的工作外, 单侧移位的研究已被 Lax[75] 和 [76], Halmos[56], 以及更近期的被 Helson[61], Sz. Nagy 和 Foias[107] 诸多工作所推广.

将 H^∞ 作为 Banach 代数的研究大部分始于文献 [100], 这方面所得到的最深刻结果是 Carleson 日冕定理 [14] 和 [15].

定理 6.24 所表述的内容是与所谓的预测理论 (参见 [54]) 紧密相联系的. 代数 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 最早是在预测理论 [63] 的一个问题中出现的, 有关它在本书的大部分结果属于 Sarason[97]. 至于对介于 H^∞ 和 $L^\infty(\mathbb{T})$ 之间代数的研究是由著者在研究 Toeplitz 算子的可逆性问题 [31] 时提出的. 定理 6.32 取自 [34], 该文证明了可测幺模函数可由内函数的商一致逼近. Gleason-Whitney 定理取自 [43]. 调和扩张在研究 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中函数可逆性中的作用建立于 [30].

习　题

习题 6.1　若 φ 和 ψ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中幺模函数, 则 $\varphi H^2 = \psi H^2$ 当且仅当有一个复数 λ 使 $\varphi = \lambda\psi$.

定义　称 H^1 中一个函数 f 为外函数是指 $\mathrm{clos}_1[f\mathscr{P}_+] = H^1$.

习题 6.2　空间 H^1 中一个函数 f 为外函数当且仅当它是 H^2 中两个外函数的乘积.

习题 6.3　设 $\mathscr{M}$ 为 H^1 的一个闭线性子空间, 则它满足 $\chi_1\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$ 当且仅当有个内函数 φ 使 $\mathscr{M} = \varphi H^1$. 试对 $L^1(\mathbb{T})$ 的闭线性子空间叙述并证明相应的准则. *

习题 6.4　若 f 为 H^1 中一个非零函数, 则有内函数 φ 和 H^1 中一个外函数 g 使 $f = \varphi g$.

习题 6.5　若 f 为 H^1 中一个非零函数, 则集合 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T} : f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0\}$ 的测度为零.

习题 6.6　一个解析多项式是 H^1 或 H^2 中外函数当且仅当它在 $\mathbb{D}$ 内无零点.

习题 6.7　试证明: $\mathbb{D}$ 上旋转都诱导圆周群在 $\mathrm{Aut}(H^\infty) \subset \mathrm{hom}(M_\infty)$ 中一个自然表示. 证明 M_∞ 中一个点在这个同胚群的作用下有闭轨道当且仅当该点在 $\mathbb{D}$ 内. *

定义　若 $\widehat{\chi_1}$ 为 χ_1 在 M_∞ 上的 Gelfand 变换, 则规定 M_∞ 在点 $\lambda \in \mathbb{T}$ 处的纤维为以下集合

$$F_\lambda = \{m \in M_\infty : \widehat{\chi_1}(m) = \lambda\}.$$

习题 6.8　M_∞ 的诸纤维 F_λ 均是紧的且彼此同胚.

习题 6.9　设函数 φ 属于 H^∞ 且复数 λ 属于 $\mathbb{T}$, 则 $\widehat{\varphi}$ 于空间 $\{\lambda\}\bigcup\mathbb{D}$ 中点 λ 的一个邻域有下界当且仅当 $\widehat{\varphi}$ 在纤维 F_λ 上无零点.

习题 6.10　设函数 φ 属于 H^∞ 且复数 λ 属于 $\mathbb{T}$. 若 α 在 $\widehat{\varphi}|F_\lambda$ 的值域中, 证明 $\mathbb{D}$ 中有个序列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lambda$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\varphi}(z_n)=\alpha$.

习题 6.11　证明$\mathbb{D}$ 在 M_∞ 中的稠密性等价于下列陈述: 当 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$ 是 H^∞ 中函数且有个正数 ε 使诸 $z\in\mathbb{D}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^N|\varphi_i(z)|\geqslant\varepsilon$ 时, 必有 H^∞ 中函数 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_N$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^N\varphi_i\psi_i=1$. 试在诸 $\overline{\varphi}_i$ 属于 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 这一额外假定下, 证明上述结论.

习题 6.12　若 $\mathfrak{A}$ 为一闭代数使 $H^\infty\subseteq\mathfrak{A}\subseteq L^\infty(\mathbb{T})$, 则 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的极大理想空间可作为 $\mathfrak{A}$ 的 Šilov 边界而自然地嵌入 $M_{\mathfrak{A}}$.

习题 6.13(Newman)　证明 $\mathbb{D}$ 在 M_∞ 的闭包包含了 Šilov 边界.

定义　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个等距 U 称为纯等距是指 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0}U^n\mathscr{H}=\{0\}$. 而 U 的重数是 $\dim\ker U^*$.

习题 6.14　重数为 1 的一个纯等距酉等价于 H^2 上 T_{χ_1}.

习题 6.15　重数为 N 的一个纯等距酉等价于 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\oplus H^2$ 上 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\oplus T_{\chi_1}$.

习题 6.16(von Neumann-Wold)　若 U 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个等距, 则 $\mathscr{H}$ 有正交分解 $\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$ 使子空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 约化 U, 且 $U|_{\mathscr{H}_1}$ 是一个纯等距而 $U|_{\mathscr{H}_2}$ 是一个酉算子.

习题 6.17　若 U 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个等距, 则有包含 $\mathscr{H}$ 的一个 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$ 和其上一个酉算子 W 使 $W\mathscr{H}\subseteq\mathscr{H}$ 且 $W|_{\mathscr{H}}=U$.

习题 6.18(Sz.-Nagy)　若 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个压缩算子, 则有包含 $\mathscr{H}$ 的一个 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$ 及其上一个酉算子 W 使得当 N 为自然数时, $T^N=P_{\mathscr{H}}W^N|_{\mathscr{H}}$. (提示: 选择算子 B 和 C 使分块矩阵 $\begin{bmatrix}T & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$ 为一共轭等距, 然后将上述结果用到其共轭算子上.)

习题 6.19(von Neumann)　若 T 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个压缩算子, 则定义在多项式上的映射 $\Psi: p\mapsto p(T)$ 能扩张成圆盘代数到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 的一个压缩同态. (提示: 利用上一习题.)

习题 6.20　证明 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的单位球上弱 * 拓扑等于调和扩张在 $\mathbb{D}$ 的紧集上一致收敛拓扑.(提示: 在 $\mathbb{D}$ 中任一点的赋值泛函是弱 * 连续的.)

习题 6.21　若 f 为 H^1 中函数, 当 $0<r<1$ 时, 对于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in\mathbb{T}$, 记 $f_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, 则有 $\lim\limits_{r\to 1}\|f-f_r\|_1=0$. (提示: 模仿定理 6.46 的证明.)

习题 6.22 若 f 属于 $L^1(\mathbb{T})$ 且 $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 0$. 记 $F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$, 则调和扩张 $\widehat{f}$ 满足

$$\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_r(t)F(\theta - t)\mathrm{d}t,$$

此处 $k_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}$. (提示: 注意 $\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_r(\theta - t)dF(t)$ 并用分部积分.)

习题 6.23(Fatou) 诸 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 在 $\mathbb{D}$ 上的调和扩张 $\widehat{f}$ 满足 $\lim\limits_{r\to 1}\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ a.e.* (提示: 证明

$$\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-tk_r(t)]\left\{\frac{F(\theta+t) - F(\theta - t)}{2t}\right\}\mathrm{d}t$$

并且 $\lim\limits_{r\to 1}\widehat{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = F'(\theta)$, 只要后面这一导数 $F'(\theta)$ 存在.)

习题 6.24 若 φ 为 H^∞ 中一个函数, $\widehat{\varphi}$ 为它在 M_∞ 上的 Gelfand 变换, 则 $|\widehat{\varphi}|$ 是次调和的, 即当 $\mathbb{T}$ 上有界实值函数 ψ 满足 $\psi \geqslant |\varphi|$ 时, ψ 至 M_∞ 的调和扩张 $\widehat{\psi}$ 满足 $\widehat{\psi} \geqslant |\widehat{\varphi}|$.

习题 6.25 空间 H^1 中 f 是一个外函数当且仅当在 $\mathbb{T}$ 上满足 $|f| \geqslant |g|$ 的 H^1 中函数 g 使在 M_∞ 上 $|\widehat{f}| \geqslant |\widehat{g}|$.

习题 6.26 (Jensen 不等式) 若 f 为 H^1 中函数, 则

$$\log|\widehat{f}(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\mathrm{d}t.*$$

(提示: 设 f 在圆盘代数 A 中, 并以 A 中函数 g 的实部 u 逼近 $\log(|f| + \varepsilon)$, 证明 $\log|\widehat{f}(0)| - \widehat{u}(0) < \varepsilon$, 然后命 ε 趋于 0.)

习题 6.27 (Kolmogorov-Kreĭn) 若 μ 为 $\mathbb{T}$ 上一个正测度, μ_a 为 μ 的绝对连续部分, 则

$$\inf_{f\in A_0}\int_{\mathbb{T}}|1 - f|^2\mathrm{d}\mu = \inf_{f\in A_0}\int_{\mathbb{T}}|1 - f|^2\mathrm{d}\mu_a.*$$

(提示: $A_0 = \{f \in A| \int_0^{2\pi} f\mathrm{d}\theta = 0\}$(下同). 若 F 是 1 到 A_0 在 $L^2(\mu)$ 的闭包上的投影, 证明此时必有 $1 - F = 0$ a.e. μ_s, 此处 μ_s 为 μ 的奇异部分.)

习题 6.28 H^2 中一个函数 f 为外函数当且仅当

$$\inf_{h\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1 - h|^2|f|^2\mathrm{d}\theta = |\widehat{f}(0)|^2.*$$

(提示: 证明 f 为一外函数当且仅当 $1 - \widehat{f}(0)/f$ 为 1 到 A_0 在 $L^2(|f|^2\mathrm{d}\theta)$ 中闭包上的投影.)

习题 6.29(Szegö)　若 μ 为 $\mathbb{T}$ 上正测度, 则

$$\inf_{f\in A_0}\int_{\mathbb{T}}|1-f|^2\mathrm{d}\mu=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log h\mathrm{d}\theta\right),$$

此处 h 是 μ 关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数. * (提示: 利用习题 6.27 将问题归结为 μ 形如 $\omega\mathrm{d}\theta$ 的情形, 并利用几何算术平均不等式得到一个方向的不等式, 反方向不等式可将问题归结为 μ 形如 $|h|^2\mathrm{d}\theta$ 情形, 此处 h 为一外函数.)

习题 6.30　设 $\mathfrak{A}$ 为一个闭子代数使 $H^\infty\subseteq\mathfrak{A}\subseteq L^\infty(T)$, 则 $\mathfrak{A}$ 由 H^∞ 和那些使 u 和 $\overline{u}$ 均属于 $\mathfrak{A}$ 的幺模函数 u 生成. (提示: 若 f 在 $\mathfrak{A}$ 中, 则 $f+2\|f\|=ug$, 此处 u 是幺模的, 而 g 为外函数.)

习题 6.31　若 Γ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中某些幺模函数构成的一个群, 命 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中由 H^∞ 和 Γ 生成的闭子代数, 则其极大理想空间 M_Γ 可等同于以下集合

$$\{m\in M_\infty:|m(u)|=1,u\in\Gamma\}.$$

习题 6.32　是否诸 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 都形如 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 使 Σ 是某些内函数组成的半群? ** ①

习题 6.33　证明 $H^\infty+\overline{H}^\infty$ 的闭包不等于 $L^\infty(\mathbb{T})$. *(提示: 如果 $\arg z$ 会在 $H^\infty+\overline{H}^\infty$ 的闭包中, 则会有个 $\varphi\in H^\infty$ 使 $z\mathrm{e}^\varphi$ 会在 H^∞ 中可逆.)

习题 6.34　若 m 为 F_λ 中点, μ 是 M_{L^∞} 上唯一的正测度使

$$\widehat{\varphi}(m)=\int_{M_{L^\infty}}\widehat{\varphi}\mathrm{d}\mu,\varphi\in L^\infty(\mathbb{T}),$$

则 μ 的支撑落于 $M_{L^\infty}\cap F_\lambda$. *(提示: 证明诸 $\varphi\in H^\infty$ 使 $|\widehat{\varphi}|$ 在 F_λ 上的最大值在 $M_\infty\cap F_\lambda$ 上取到.)

习题 6.35　若 φ 和 ψ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中两个函数, 前者连续, 则 $\widehat{\varphi\psi}$ 与 $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$ 在 $\mathbb{D}$ 上渐近相等且在 $M_\infty\setminus\mathbb{D}$ 上相等.

习题 6.36　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则 H^1 上线性泛函 $L:f\mapsto\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\varphi\mathrm{d}\theta$ 是弱 * 连续的当且仅当 φ 属于 $H^\infty+C(\mathbb{T})$.

习题 6.37　证明 $\mathbb{T}$ 上右连续同时在 $\mathbb{T}$ 中诸点有左极限的函数全体 PC 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个一致闭的自伴子代数. 证明分段连续函数是 PC 的一个稠子代数. 证明 PC 的极大理想空间等同于两份 $\mathbb{T}$ 之无交并, 后者带异常拓扑.

习题 6.38　若 φ 为 PC 中一个函数, 则 φ 在 F_λ 上调和扩张的值域是连接 φ 在 λ 处左极限和右极限的闭线段.

①形如 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 的代数被 Sarason 称为 “Douglas 代数”, 他得到了这方面很多有意义的结果 [*Function Theory on the Unit Circle*, Virginia Poly. Inst. and State Univ. Blacksburg, Virginia (1979)]. S. -Y. Chang [A characterization of Douglas subalgebra,*Acta. Math.* 137, 81-89 (1976)] 和 D. E. Marshall [Subalgebras of L^∞ containing H^∞, *Acta. Math.* 137, 91-98 (1976)] 一起已经证明了介于 H^∞ 和 L^∞ 之间的每一代数是这种形式.

习题 6.39 证明 $QC = [H^\infty + C(\mathbb{T})] \cap \overline{[H^\infty + C(\mathbb{T})]}$ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个一致闭的自伴子代数且真包含 $C(\mathbb{T})$. 证明 QC 中诸内函数都连续, 但 $QC \cap H^\infty$ 不等于圆盘代数 A.*(提示: 在 $C(\mathbb{T})$ 中有个实值函数 φ, 它不在 $\mathrm{Re}A$ 中, 若 ψ 为 $L^2(\mathbb{T})$ 中实值函数使 $\varphi + \mathrm{i}\psi$ 属于 H^2, 则函数 $\mathrm{e}^{\varphi+\mathrm{i}\psi}$ 属于 H^∞ 且函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ 属于 QC.)

习题 6.40 若 u 是 QC 中一个幺模函数, 则在 $M_\infty \backslash \mathbb{D}$ 上恒有 $|\hat{u}| = 1$. 其逆为真吗?** ②

习题 6.41 证明由 H^∞ 和 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中那些使 $|\hat{u}|$ 可连续扩张到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的函数 u 生成的闭子代数有极大理想空间 $M_\infty \backslash \mathbb{D}$. 这个代数是否为 $H^\infty + C(\mathbb{T})$? **4

习题 6.42 证明 $PC \cap QC = C(\mathbb{T})$. (提示: 观察此交集中幺模函数并利用习题 6.38 和习题 6.40)

习题 6.43 证明在 H^∞ 与 $(L^1(\mathbb{T})/H_0^1)^*$ 之间有自然等距同构. 证明解析三角多项式全体 $\mathscr{P}_+$ 在代数 H^∞ 中是弱 * 稠密的.

②Sarason [Functions of vanishing mean oscillation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 207, 391-405 (1975)] 证明了 QC 是由 L^∞ 中具有湮灭平均振动的函数所组成, 这种函数性质类似于早期由 Kohn 和 Nirenberg 所引入的有界平均振动的 “小 o”. 这一特征使 Sarason 对两个问题均作出了肯定的回答.

第7章　Toeplitz 算子

7.1　尽管人们已作了很大努力, 但 Hilbert 空间上能完全了解的算子类型仍然极少. 除了自伴算子及少量其他例子外, 人们对各种算子类型的详细结构知之甚少. 事实上, 在许多情况下甚至连怎样提出合适的问题都不清楚. 在本章中我们将研究一类算子, 关于这类算子已有许多问题得到解决, 但还有更多问题有待解决. 虽然我们得到的结果看起来似乎局限于这类算子本身, 但这类算子在其他数学领域的出现就已经表明它们在算子理论中的重要作用比人们最初的感觉要大得多.

我们以这类算子的定义作为开始.

7.2 定义　设 P 为 $L^2(\mathbb{T})$ 到 Hardy 空间 H^2 上的投影算子. 以 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中诸函数 φ 为符号, 规定 Hardy 空间 H^2 上 Toeplitz 算子$T_\varphi : f \mapsto P(\varphi f)$.

7.3　早期研究中 Toeplitz 算子不是作为 Hardy 空间上算子而是作为 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上算子. 考虑 H^2 的规范正交基 $\{\chi_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 和 Toeplitz 算子 T_φ 相对于此基的表示矩阵 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}_+}$. 用 φ 的 Fourier 系数 $\widehat{\varphi}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi\chi_{-n}\mathrm{d}t$ 可表达矩阵元素

$$a_{m,n} = (T_\varphi \chi_n, \chi_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\chi_{n-m}\mathrm{d}t = \widehat{\varphi}(m-n).$$

因此 T_φ 的表示矩阵在诸对角线上都为常数; 这样的矩阵称为 Toeplitz 矩阵, 能够证明定义了有界算子的 Toeplitz 矩阵的诸对角线值恰好是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中某个函数的 Fourier 系数 (参见 [11]).

从 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $\mathfrak{L}(H^2)$ 有映射 $\xi : \varphi \mapsto T_\varphi$, 我们下面考察其基本性质来展开对于 Toeplitz 算子的研究.

7.4 命题　映射 ξ 是从 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $\mathfrak{L}(H^2)$ 的一个压缩 *- 线性映射.

证明　易知 ξ 是压缩的和线性的. 为证 $\xi(\varphi)^* = \xi(\overline{\varphi})$, 任取 H^2 中向量 f 和 g, 我们有

$$\begin{aligned}(T_{\overline{\varphi}} f, g) =& (P(\overline{\varphi f}), g) = (f, \varphi g) \\ =& (f, P(\varphi g)) = (f, T_\varphi g) = (T_\varphi^* f, g).\end{aligned}$$

因而 $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$, 即 $\xi(\varphi)^* = \xi(\overline{\varphi})$. ■

映射 ξ 不可乘, 因此不是同态. 以后我们会看到 ξ 实际上是 $\{T_\varphi : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\}$ 生成的 C*- 代数到 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上的一个 *- 同态的等距截面, 即若 α 是这个 *- 同态, 则 $\alpha \circ \xi$ 是代数 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上恒等同构.

在某些特殊情况下, ξ 是可乘的, 这点在以后讨论中是很重要的.

7.5 命题　设 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 若 ψ 和 $\overline{\theta}$ 为 H^∞ 中函数, 则 $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ 且 $T_\theta T_\varphi = T_{\theta\varphi}$.

证明　任取 $f \in H^2$, 由命题 6.2 知 ψf 属于 H^2, 因此 $P(\psi f) = \psi f$. 于是

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f,$$

亦即 $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$. 取共轭后, 命题的第二部分便归结为第一部分. ■

上述命题的逆也是正确的 [11], 但这结论在以后论述中不会用到.

下面我们考虑一个基本结果, 它能使我们证明 ξ 是个等距.

7.6 命题　若 φ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数使 T_φ 可逆, 则 φ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中是可逆的.

证明　由推论 4.24, 只需证明当 T_φ 可逆时, M_φ 可逆. 取 $\varepsilon > 0$ 使诸 $f \in H^2$ 满足 $\|T_\varphi f\|_2 \geqslant \varepsilon\|f\|_2$. 因此对于每个整数 n 和 H^2 中每个函数 f, 我们有

$$\begin{aligned}\|M_\varphi(\chi_n f)\|_2 =&\|\varphi\chi_n f\|_2 = \|\varphi f\|_2\\ \geqslant&\|P(\varphi f)\|_2 = \|T_\varphi f\|_2\\ \geqslant&\varepsilon\|f\|_2\\ =&\varepsilon\|\chi_n f\|_2.\end{aligned}$$

但知函数族 $\{\chi_n f : f \in H^2, n \in \mathbb{Z}\}$ 稠于 $L^2(\mathbb{T})$, 诸 $g \in L^2(\mathbb{T})$ 便使 $\|M_\varphi g\|_2 \geqslant \varepsilon\|g\|_2$. 因为 $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi^*$ 也可逆, 相仿地有 $\|M_{\overline{\varphi}} g\|_2 \geqslant \varepsilon\|g\|_2$. 根据推论 4.9 知 M_φ 可逆, 证毕. ■

作为上述命题的推论, 我们得到以下谱包含定理.

7.7 推论 (Hartman-Wintner)　若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则

$$\mathscr{R}(\varphi) = \sigma(M_\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi).$$

证明　诸复数 λ 使 $T_\varphi - \lambda I = T_{\varphi-\lambda}$, 据上述命题知 $\sigma(M_\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi)$. 而等式 $\mathscr{R}(\varphi) = \sigma(M_\varphi)$ 已得于推论 4.24, 这样证明即完成. ■

这个结果使我们能完善 ξ 的初等性质.

7.8 推论　映射 ξ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $\mathfrak{L}(H^2)$ 内的一个等距.

证明　利用命题 2.28、推论 4.24 和推论 7.7, 对于 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 有

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_\infty \geqslant \|T_\varphi\| \geqslant r(T_\varphi) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_\varphi)\}\\ &\geqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathscr{R}(\varphi)\} = \|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

因此 ξ 为等距的. ■

7.9 现在有几个额外的对应性质. 若 T_φ 是一个拟幂零算子, 则

$$\mathscr{R}(\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi) = \{0\}$$

表明 $\varphi = 0$. 若 T_φ 为自伴的, 则

$$\mathscr{R}(\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi) \subset \mathbb{R}$$

表明 φ 是一个实值函数.

我们现在来构造使 ξ 成为截面的那个同态.

7.10 定义 设 S 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个子集, 以 $\mathfrak{T}(S)$ 记 $\mathfrak{L}(H^2)$ 的包含 $\{T_\varphi : \varphi \in S\}$ 的最小闭子代数.

7.11 定理 以 $\mathfrak{C}$ 记 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的换位子理想, 则 ξ 诱导的从 $L^\infty(\mathbb{T})$ 到 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{C}$ 的映射 $\xi_c : \varphi \mapsto [T_\varphi]$ 为一个等距 *- 同构. 因此有个短正合列

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \xrightarrow{\rho} L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\},$$

而 ξ 为其一个等距截面.

证明 显然, ξ_c 是 *- 线性的和压缩的. 为证其可乘性, 只需验证它在 L^∞ 的某个稠密子代数 $\mathscr{Q}$ 上可乘. 据定理 6.32, 可设 $\mathscr{Q} = \{\psi\overline{\varphi} : \psi \in H^\infty, \varphi\text{为内函数}\}$. 现在, 当 φ_1 和 φ_2 为内函数且 ψ_1 和 ψ_2 为 H^∞ 中函数时, 换位子$T_{\psi_1}T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_2}^*T_{\psi_1}$ 属于理想 $\mathfrak{C}$ 且

$$\begin{aligned}
\xi(\psi_1\overline{\varphi_1})\xi(\psi_2\overline{\varphi_2}) - \xi(\psi_1\overline{\varphi_1}\psi_2\overline{\varphi_2}) &= T_{\psi_1\overline{\varphi_1}}T_{\psi_2\overline{\varphi_2}} - T_{\psi_1\overline{\varphi_1}\psi_2\overline{\varphi_2}} \\
&= T_{\varphi_1}^*(T_{\psi_1}T_{\varphi_2}^* - T_{\psi_1\overline{\varphi_2}})T_{\psi_2} \\
&= T_{\varphi_1}^*(T_{\psi_1}T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_2}^*T_{\psi_1})T_{\psi_2}.
\end{aligned}$$

因为上面等式的最后一项落于 $\mathfrak{C}$, 所以 ξ_c 在 $\mathscr{Q}$ 上是可乘的.

为证明 ξ_c 是等距的, 我们需证诸 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 和 $K \in \mathfrak{C}$ 满足 $\|T_\varphi + K\| \geqslant \|T_\varphi\|$. 这只需要检验 K 在 $\mathfrak{C}$ 的某个稠密子集情形, 因此可设

$$K = \sum_{i=1}^{n} A_i[T_{\psi_i\overline{\varphi_i}}, T_{\psi_i'\overline{\varphi_i'}}]\prod_{j=1}^{m} T_{\alpha_{ij}\overline{\beta_{ij}}},$$

其中 A_i 在 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 中, φ_i 和 φ_i' 及 β_{ij} 都为内函数, 函数 ψ_i 和 ψ_i' 及 α_{ij} 均属于 H^∞, 而方括号记换位子. 作内函数 $\theta = \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{n,m} \beta_{ij}\varphi_i\varphi_i'$, 则诸 $f \in H^2$ 使 $K(\theta f) = 0$.

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $f \in H^2$ 使 $\|f\|_2 = 1$ 且 $\|T_\varphi f\|_2 \geqslant \|T_\varphi\| - \varepsilon$. 设 $\varphi f = g_1 + g_2$ 使 g_1 属于 H^2 而 g_2 正交于 H^2, 注意到 θ 为一内函数, θg_1 在 H^2 中且与 θg_2 正交. 因

此

$$\begin{aligned}\|(T_\varphi + K)(\theta f)\|_2 =& \|T_\varphi(\theta f)\|_2 = \|P(\varphi\theta f)\|_2 \\ \geqslant& \|\theta g_1\|_2 = \|g_1\|_2 = \|T_\varphi f\|_2 \geqslant \|T_\varphi\| - \varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 $\|T_\varphi + K\| \geqslant \|T_\varphi\|$, 此即完成了证明. ■

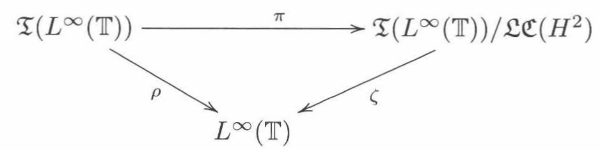
基于 Bunce[12] 的一个定理, 上述结果有个避开定理 6.32 的直接证明. 在这种情况下, 谱包含定理便是其推论了.

C*- 代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 是一个非常有意义的代数, 上述结果表明对于它的研究很大程度上可归结为对于换位子理想 $\mathfrak{C}$ 的研究, 然而我们对此理想所知甚少. 我们能证明 $\mathfrak{C}$ 包含了诸紧算子, 若干重要推论得自这个事实.

7.12 命题 C*- 代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想是 $\mathfrak{LC}(H^2)$. 而 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的换位子理想便包含 $\mathfrak{LC}(H^2)$.

证明 因 T_{χ_1} 是一个单侧移位, 故 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想包含 $T_{\chi_1}^*T_{\chi_1} - T_{\chi_1}T_{\chi_1}^*$ 这个秩一算子. 据 Beurling 定理, T_{χ_1} 没有真约化子空间, $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 便不可约. 据定理 5.39 知 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 包含 $\mathfrak{LC}(H^2)$. 又因 T_{χ_1} 在商代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中的像是正规的且生成这个商代数, 故这个商代数是交换的. 因而 $\mathfrak{LC}(H^2)$ 包含 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想. 为完成 $\mathfrak{LC}(H^2)$ 等于 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想的证明, 只需证明 $\mathfrak{LC}(H^2)$ 不含有真闭理想. 今假设 $\mathfrak{J}$ 为这样一个真闭理想, 则它含有一个自伴算子 H. 将 H 乘以一个由它的非零本征向量张成的线性子空间上的投影算子, 我们得到 $\mathfrak{J}$ 中一个秩一投影算子. 至此, 定理 5.39 的证明中最后一段的论证能用于此, 从而 $\mathfrak{LC}(H^2)$ 为 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想. 显然, $\mathfrak{LC}(H^2)$ 含于 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的换位子理想中. ■

7.13 推论 从商代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 至 $L^\infty(\mathbb{T})$ 上有 *- 同态 ζ 使下图交换:



证明 由定理 7.11 和上述命题立即得到. ■

7.14 推论 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数使 T_φ 为 Fredholm 算子, 则 φ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中是可逆的.

证明 若 T_φ 为 Fredholm 算子, 则由定义 5.14 知 $\pi(T_\varphi)$ 在 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中可逆. 因而 $\varphi = (\zeta \circ \pi)(T_\varphi)$ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中可逆. ■

7.15 沿用上述思路还可得到某些其他结果. 特别地, 由推论 7.13 知诸函数 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 和诸算子 $K \in \mathfrak{LC}(H^2)$ 使 $\|T_\varphi + K\| \geqslant \|T_\varphi\|$. 因而仅有的紧 Toeplitz 算子是零算子.

让我们再次考虑 Toeplitz 算子 T_{χ_1}. 其谱是闭圆盘, 我们看到多数 Toeplitz 算子的谱比其符号 φ 的本质值域要大. 正是这个现象极大地引起了我们的关注. 特别地, 我们将关注于确定 Toeplitz 算子的可逆性准则及其谱的算法. 沿此方向中最深刻也可能是最令人惊叹的结果是 Widom 关于 Toeplitz 算子有连通谱的结论. 这一结论将在本章末尾来证明.

我们现在来证明 Toeplitz 算子的谱不能比其符号的本质值域大得太多. 我们从回顾关于凸集的一些初等性质和一个引理开始展开讨论.

7.16 定义　若 E 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集, 其闭凸包记为 $h(E)$, 这是 $\mathbb{C}$ 中包含 E 的一切闭凸集的交.

7.17 引理　若 E 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集, 则 $h(E)$ 是一切包含 E 的半开平面之交.

证明　初等平面几何. ■

上述引理结合以下结果将证明 $\sigma(T_\varphi)$ 含于 $h(\mathscr{R}(\varphi))$ 中.

7.18 命题　若 φ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数使其本质值域落于右半开平面, 则 T_φ 是个可逆算子.

证明　以 Δ 记子集 $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使

$$\varepsilon\mathscr{R}(\varphi) = \{\varepsilon z : z \in \mathscr{R}(\varphi)\} \subset \Delta,$$

故 $\|\varepsilon\varphi - 1\|_\infty < 1$. 由推论 7.8 知 $\|I - T_{\varepsilon\varphi}\| < 1$, 据命题 2.5 知 $T_{\varepsilon\varphi} = \varepsilon T_\varphi$ 可逆. ■

7.19 推论 (Brown-Halmos)　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一函数, 则 $\sigma(T_\varphi) \subseteq h(\mathscr{R}(\varphi))$.

证明　据引理 7.17, 只需要证明包含 $\mathscr{R}(\varphi)$ 的半开平面都包含 $\sigma(T_\varphi)$. 而这一点只需对该半开平面作平移和旋转使之与上述命题中开的右半平面一致就行了. ■

现在我们可获得某些类型 Toeplitz 算子的可逆性和谱的各种结果, 先从自伴算子开始.

7.20 定理 (Hartman-Wintner)　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个实值函数, 则

$$\sigma(T_\varphi) = [\text{ess inf}\varphi, \text{ess sup}\varphi].$$

证明　因 T_φ 有实谱, 只需证明当实数 λ 使 $T_\varphi - \lambda I$ 为可逆算子时, 几乎所有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$ 使 $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - \lambda \geqslant 0$ 或几乎所有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$ 使 $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - \lambda \leqslant 0$. 为此取 H^2 中一个函数 g 使 $(T_\varphi - \lambda I)g = 1$, 则有 H_0^2 中一个函数 h 使 $(\varphi - \lambda)g = 1 + \overline{h}$. 注意到 $(\varphi - \lambda)\overline{g} = 1 + h$ 属于 H^2, 即得 $(\varphi - \lambda)|g|^2 = (1+h)g$ 属于 H^1, 于是根据推论 6.6 知 $(\varphi - \lambda)|g|^2$ 与某个实数 α 几乎处处相等. 据 F. & M. Riesz 定理知 $g \neq 0$ a.e. 因此 $\varphi - \lambda$ 与 α 同号, 这正是要证的. ■

事实上人们已经得到有关自伴 Toeplitz 算子的更多结果, 特别是这类算子在酉等价意义下的谱预解结果 (参见 Ismagilov[68], Rosenblum[94] 和 Pincus[86]).

具有解析符号的 Toeplitz 算子特别便于研究. 若 φ 属于 H^∞, 则 T_φ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 上正规算子 M_φ 在其不变子空间 H^2 上的限制, 因而它是一个所谓次正规算子.

7.21 定理 (Wintner)　设 φ 为 H^∞ 中一个函数, 则 T_φ 可逆当且仅当 φ 在 H^∞ 中可逆. 一般地, 以 $\widehat{\varphi}$ 记 φ 的 Gelfand 变换, 则 $\sigma(T_\varphi) = \text{clos}[\widehat{\varphi}(\mathbb{D})]$.

证明　若 φ 于 H^∞ 可逆, 取 $\psi \in H^\infty$ 使 $\varphi\psi = 1$. 由命题 7.5 知 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi = I$. 反之, 若 T_φ 可逆, 由命题 7.6 知 φ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中有逆 ψ. 由命题 7.5 得 $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi} = I$, 这表示 T_ψ 是 T_φ 的一个左逆, 因此 $T_\psi = T_\varphi^{-1}$. 于是 $1 = T_\varphi T_\psi 1 = \varphi P(\psi)$, 左式两边同乘以 ψ 得 $\psi = P(\psi)$, 这表明 ψ 属于 H^∞ 并由此完成了 φ 在 H^∞ 中可逆的论证.

一般地, $\sigma(T_\varphi) = \text{clos}[\widehat{\varphi}(\mathbb{D})]$ 这一事实得于定理 6.18. ■

这个结果对于具有解析符号 φ 的 Toeplitz 算子 T_φ 何时可逆及其谱是什么这样的问题给出了特别好的答案. 沿着这一思路我们试着对更一般的符号去确定相应的答案. 下一步我们将研究具有连续符号的 Toeplitz 算子, 并且发现在这时候一个本质不同的附加内容会进入答案. 我们对这类算子的研究依赖于对 C*- 代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的分析.

我们开始先证明当符号的一个因子为连续时, ξ 是几乎可乘的.

7.22 命题　若 φ 属于 $C(\mathbb{T})$ 且 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 $T_\varphi T_\psi - T_{\psi\varphi}$ 和 $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$ 均为紧算子.

证明　先证诸 $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使算子 $T_\psi T_{\chi_{-1}} - T_{\psi\chi_{-1}}$ 的秩至多为 1. 为此任取 $f \in H^2$, 则

$$\begin{aligned} T_\psi T_{\chi_{-1}} f &= T_\psi P(\chi_{-1} f) = PM_\psi(\chi_{-1} f - (f,1)\chi_{-1}) \\ &= P(\psi\chi_{-1} f) - (f,1)P(\psi\chi_{-1}) \\ &= T_{\psi\chi_{-1}} f - (f,1)P(\psi\chi_{-1}). \end{aligned}$$

归纳地设对于自然数 n, 诸 $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使 $T_\psi T_{\chi_{-n}} - T_{\psi\chi_{-n}}$ 至多有秩 n, 则

$$\begin{aligned} T_\psi T_{\chi_{-n-1}} - T_{\psi\chi_{-n-1}} =& (T_\psi T_{\chi_{-n}} - T_{\psi\chi_{-n}})T_{\chi_{-1}} \\ &+ (T_{\psi\chi_{-n}} T_{\chi_{-1}} - T_{(\psi\chi_{-n})\chi_{-1}}), \end{aligned}$$

它至多有秩 $n+1$. 由命题 7.5 知 $T_\psi T_{\chi_n} = T_{\psi\chi_n}$, 因此诸三角多项式 p 使 $T_\psi T_p - T_{\psi p}$ 为紧算子. 由于三角多项式全体在 $C(\mathbb{T})$ 中稠密且 ξ 为等距, 诸 $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 和诸 $\varphi \in C(\mathbb{T})$ 便使 $T_\psi T_\varphi - T_\varphi T_\psi$ 为紧算子.

最后, $(T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi})^* = T_{\overline{\varphi}} T_{\overline{\psi}} - T_{\overline{\psi}\overline{\varphi}}$, 我们看到这个算子也是紧的. ■

有关 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的基本事实含于以下 Coburn 定理.

7.23 定理 (Coburn)　C*- 代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想为 $\mathfrak{LC}(H^2)$, 且下述序

列

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{LC}(H^2) \longrightarrow \mathfrak{T}(C(\mathbb{T})) \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\}$$

是短正合的, 因此商代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 与 $C(\mathbb{T})$ 是等距 *- 同构的.

证明 由上述命题知推论 7.13 中的映射 ζ 在代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 上的限制是到 $C(\mathbb{T})$ 上的一个等距 *- 同构, 即知定理为真. ■

由上述定理及以下命题可得到有连续符号的 Toeplitz 算子的谱.

7.24 命题 (Coburn) 若 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中函数 φ 非几乎处处为零, 则或者 $\ker T_\varphi = \{0\}$ 或者 $\ker T_\varphi^* = \{0\}$.

证明 若 f 属于 $\ker T_\varphi$ 且 g 属于 $\ker T_\varphi^*$, 则 $\overline{\varphi}\overline{f}$ 和 $\varphi\overline{g}$ 均属于 H_0^2. 根据引理 6.16 知 $\varphi f\overline{g}$ 和 $\overline{\varphi}\overline{f}g$ 均在 H_0^1 中, 这样由推论 6.7 得 $\varphi f\overline{g}$ 为零. 若 f 和 g 都非零向量, 由 F. & M. Riesz 定理知 φ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处为零, 这与假设矛盾. ■

7.25 推论 若 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中某个函数 φ 使 T_φ 为一个 Fredholm 算子, 则 T_φ 可逆当且仅当 $j(T_\varphi) = 0$.

证明 由上述命题直接得到. ■

因此确定一个 Toeplitz 算子何时可逆的问题现在已转换成了确定它何时是一个 Fredholm 算子以及其指标是什么. 这个问题在 φ 连续时已获得解决, 而结果归功于许多作者, 包括 Kreĭn, Widom 和 Devinatz, 我们在此的方法则源自 Gohberg.

7.26 定理 若 φ 为 $\mathbb{T}$ 上连续函数, 则 T_φ 为 Fredholm 算子当且仅当 φ 无零点; 此时, $j(T_\varphi)$ 等于 φ 画出的曲线关于原点绕数的负值.

证明 首先, 根据定理 7.23 知 T_φ 为一个 Fredholm 算子当且仅当 φ 在 $C(\mathbb{T})$ 中可逆. 其次, 为了确定 T_φ 的指标, 我们先观察到只要 φ 和 ψ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 中确定的曲线是同伦的, 就有 $j(T_\varphi) = j(T_\psi)$. 为看清楚这一点, 取 $[0,1]\times\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 的一个连续映射 Φ 使诸 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in\mathbb{T}$ 适合 $\Phi(0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 且 $\Phi(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \psi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. 现在命 $\Phi_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \Phi(\lambda,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, 于是映射 $\lambda \mapsto T_{\Phi_\lambda}$ 依范数连续且诸 T_{Φ_λ} 为 Fredholm 算子. 因为 $j(T_{\Phi_\lambda})$ 关于 λ 连续且只取整数, 所以 $j(T_\varphi) = j(T_\psi)$.

最后, 若由 φ 确定的曲线关于原点有绕数 n, 则 φ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 中同伦于 χ_n. 因为 $j(T_{\chi_n}) = -n$l, 所以我们有 $j(T_\varphi) = -n$, 证明完成. ■

7.27 推论 若 φ 为 $\mathbb{T}$ 上连续函数, 则 T_φ 可逆当且仅当 φ 无零点且由 φ 确定的曲线关于原点有零绕数.

证明 结合上述定理和推论 7.25 即可 ■

7.28 推论 将 $\mathbb{T}$ 上连续函数 φ 确定的曲线关于点 λ 的绕数记为 $i_t(\varphi,\lambda)$, 则

$$\sigma(T_\varphi) = \mathscr{R}(\varphi) \cup \{\lambda\in\mathbb{C} : i_t(\varphi,\lambda) \neq 0\}.$$

特别地, T_φ 有连通谱, 原因在于它是由 $\mathscr{R}(\varphi)$ 及其补集中某些连通分支并成的.

此时, Toeplitz 算子 T_φ 的可逆性依赖于 φ 在适当 Banach 代数如 $C(\mathbb{T})$ 中依某种拓扑准则的可逆性. 特别地, 关于绕数的条件意味着 φ 必须位于 $C(\mathbb{T})$ 中单位元的连通分支, 即 φ 代表了 $C(\mathbb{T})$ 的抽象指标群的单位元. 尽管我们会将上面结果推广到更大代数 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 上, 然而这些方法将不足于处理有界可测函数这个一般情况.

我们仍以确定 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想及相应的商代数作为开始.

7.29 定理 代数 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))$ 的换位子理想为 $\mathfrak{LC}(H^2)$ 且映射 $\xi_K = \pi \circ \xi$ 是从 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 到 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 的一个等距同构.

证明 代数 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))$ 包含 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$, 后者包含 $\mathfrak{LC}(H^2)$. 现假设 φ 和 ψ 为 H^∞ 中函数, 而 f 和 g 均为连续函数, 由命题 7.5 算得

$$
\begin{aligned}
&T_{\varphi+f}T_{\psi+g} - T_{(\varphi+f)(\psi+g)} \\
=&T_{\varphi+f}T_{\psi} - T_{(\varphi+f)\psi} + T_{\varphi+f}T_g - T_{(\varphi+f)g} \\
=&T_{\varphi+f}T_g - T_{(\varphi+f)g}.
\end{aligned}
$$

由命题 7.22 知上述最后一个算子是紧的. 因此换位子理想含于 $\mathfrak{LC}(H^2)$, 它们便相等. 可见, 线性映射 ξ_K 是合理定义的且据推论 7.13 和 7.15 中的评论是等距的. 现由上述等式得

$$
\begin{aligned}
&\xi_K(\varphi+f)\xi_K(\psi+g) - \xi_K((\varphi+f)(\psi+g)) \\
=&\pi[T_{\varphi+f}T_{\psi+g} - T_{(\varphi+f)(\psi+g)}] = 0,
\end{aligned}
$$

因此 ξ_K 是可乘的, 从而它是个等距同构, 证明完成. ■

注意到 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))$ 不是 C*- 代数, 仅由 T_φ 为一个 Fredholm 算子即 $\pi(T_\varphi)$ 在商代数 $\mathfrak{L}(H^2)/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中有逆元这个事实不能自动保证 $\pi(T_\varphi)$ 在商代数 $\mathfrak{T}(H^\infty + C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中有逆元. 为了证明这确实为真, 我们首先必须证明一个属于 Widom 的可逆性准则, 它基于 Helson 和 Szegö从预测理论获得的一个结果.

7.30 定理 若 φ 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个幺模函数, 则 T_φ 是左可逆的当且仅当

$$
\operatorname{dist}(\varphi, H^\infty) < 1.
$$

证明 若 $\operatorname{dist}(\varphi, H^\infty) < 1$, 则 H^∞ 中存在函数 ψ 使 $\|\varphi - \psi\|_\infty < 1$ 即 $\|1 - \overline{\varphi}\psi\|_\infty < 1$. 于是 $\|I - T_{\varphi\overline{\psi}}\| < 1$, 根据命题 2.5 知 $T_\psi^* T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}$ 在 $\mathfrak{L}(H^2)$ 中可逆, 因而 T_φ 为左可逆的.

反之, 若 T_φ 左可逆, 取实数 ε 使 $0 < \varepsilon < 1$ 且诸 $f \in H^2$ 满足不等式

$$
\|P(\varphi f)\|_2 = \|T_\varphi f\|_2 \geqslant \varepsilon \|f\|_2 = \varepsilon \|\varphi f\|_2.
$$

这样便有

$$\begin{aligned}\|\varphi f\|_2^2 =&\|(I-P)(\varphi f)\|_2^2+\|P(\varphi f)\|_2^2\\ \geqslant&\|(I-P)(\varphi f)\|_2^2+\varepsilon^2\|\varphi f\|_2^2,\end{aligned}$$

即 $\|(I-P)(\varphi f)\|_2 \leqslant \delta\|f\|_2$, 此处 $\delta=(1-\varepsilon^2)^{1/2}>0$. 若 $\overline{g}$ 属于 H_0^2, 则

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi f\overline{g}\mathrm{d}t\right| = |(\varphi f, g)|\\ =&|((I-P)(\varphi f), g)| \leqslant \delta\|f\|_2\|g\|_2.\end{aligned}$$

对于 H_0^1 中 h, 依推论 6.27 取个 $f\in H^2$ 和 $\overline{g}\in H_0^2$ 使 $h=f\overline{g}$ 且 $\|h\|_1=\|f\|_2\|g\|_2$, 于是

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi h\mathrm{d}t\right| \leqslant \delta\|h\|_1.$$

因此 H_0^1 上线性泛函 $\Phi: h\mapsto \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h\varphi\mathrm{d}t$ 的范数小于 1, 由定理 6.29 (注意我们在用等同化 $(H_0^1)^*=L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty$) 知存在 $\psi\in H^\infty$ 使 $\|\varphi-\psi\|_\infty<1$, 这正是要证的. ■

7.31 推论 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个幺模函数, 则 T_φ 是可逆算子当且仅当存在外函数 ψ 使

$$\|\varphi-\psi\|_\infty<1.$$

证明 若 $\|\varphi-\psi\|_\infty<1$, 则 $|\psi|\geqslant\varepsilon>0$, 此处 $\varepsilon=1-\|\varphi-\psi\|_\infty$. 于是根据定理 7.21 和命题 6.20 知 T_ψ 可逆. 因 $T_\psi^*T_\varphi$ 是可逆的, 故 T_φ 亦可逆. 反之, 若 T_φ 可逆, 而 ψ 为 H^∞ 中函数使 $\|\varphi-\psi\|_\infty<1$. 由 $T_\psi^*T_\varphi$ 可逆知 T_ψ 也为可逆, 于是 ψ 为一个外函数. ■

作为上述命题的一个推论, 我们有如下一个非常一般的谱包含定理.

7.32 定理 设 $\mathfrak{L}(H^2)$ 的闭子代数 $\mathfrak{T}$ 包含 $\mathfrak{T}(H^\infty)$. 若 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中某个函数 φ 使 T_φ 属于 $\mathfrak{T}$, 则 $\sigma(T_\varphi)=\sigma_{\mathfrak{T}}(T_\varphi)$.

证明 显然 $\sigma(T_\varphi)$ 含于 $\sigma_{\mathfrak{T}}(T_\varphi)$. 为证反包含关系, 假设 T_φ 可逆. 利用推论 6.25 得一个幺模函数 u 和一个外函数 ψ 使 $\varphi=u\psi$, 由此知 ψ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中可逆, 根据命题 6.20 我们知 T_ψ^{-1} 在 $\mathfrak{T}$ 中. 从而 $T_u=T_\varphi T_\psi^{-1}$ 也在 $\mathfrak{T}$ 中, 进而 T_u 和 $T_{\overline{u}}$ 均在 $\mathfrak{L}(H^2)$ 中可逆. 至此, 根据上述推论知存在外函数 θ 使 $\|\theta-\overline{u}\|_\infty<1$. 现在, T_uT_θ 属于 $\mathfrak{T}$ 且

$$\|I-T_uT_\theta\|=\|1-u\theta\|_\infty<1,$$

根据命题 2.5 我们看到 T_uT_θ 在 $\mathfrak{T}$ 中可逆. 因为

$$T_\varphi^{-1}=T_\psi^{-1}T_u^{-1}=T_\psi^{-1}T_\theta(T_uT_\theta)^{-1},$$

所以 T_φ^{-1} 属于 $\mathfrak{T}$, 这样便完成了证明. ■

上述结论引出一个 Toeplitz 算子为 Fredholm 算子的必要条件.

7.33 推论　设 $\mathfrak{A}$ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个包含 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 的闭子代数. 如果 φ 为 $\mathfrak{A}$ 中一函数使 T_φ 为一个 Fredholm 算子, 则 φ 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆.

证明　设 T_φ 有指标 n, 则根据命题 7.5 和命题 7.24 知 $T_{\chi_n\varphi}$ 是可逆的. 函数 $\chi_n\varphi$ 仍在 $\mathfrak{A}$ 中, 由上述定理知 $T_{\chi_n\varphi}^{-1}$ 属于 $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$, 于是利用定理 7.11 我们得到 $\chi_n\varphi$ 在 $\rho[\mathfrak{T}(\mathfrak{A})] = \mathfrak{A}$ 中可逆. 因此 φ 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆, 此即完成证明. ■

以上这个条件对于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 而言, 也是充分的.

7.34 推论　代数 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中函数 φ 使 T_φ 为一个 Fredholm 算子当且仅当 φ 于代数 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 可逆.

证明　此结果由上述结论结合定理 7.29 直接得到. ■

我们还需要一个引理来确定以 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中函数 φ 为符号的 T_φ 的谱. 尽管这个引理通常得于内函数结构理论, 然而指出它也可由我们前面方法获得也很有意义.

7.35 引理　内函数 φ 是连续的当且仅当 $H^2 \ominus \varphi H^2$ 为有限维的.

证明　注意一个事实, 内函数 φ 都使 $H^2 \ominus \varphi H^2 = \ker T_\varphi^*$. 若 φ 连续, 则由定理 7.26 知 T_φ 为一个 Fredholm 算子, 因而 $H^2 \ominus \varphi H^2$ 是有限维的. 反之若 $H^2 \ominus \varphi H^2$ 是有限维的, 则 T_φ 为一个 Fredholm 算子. 据推论 7.34 知 φ 在 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中可逆, 我们要证这条件使 φ 连续.

据定理 6.45 知有正数 ε 和 δ 使当 $1-\delta < r < 1$ 时, $\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \geqslant \varepsilon$. 因此 $\widehat{\varphi}$ 在 $\mathbb{D}$ 内只有有限个零点, 将它们计算重数后写为 $z_1, z_2, \cdots, z_N$. 由引理 6.41 得 H^∞ 中一个函数 ψ 使 $\psi \prod_{j=1}^N (\chi_1 - z_j) = \varphi$. 从而 $\widehat{\psi}$ 在 $\mathbb{D}$ 上无零点且在边界的一个邻域上有下界, 由定理 6.18 知 ψ 在 H^∞ 中可逆. 又因诸 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$ 使

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z_j| = |1 - \overline{z_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|$$

这相当于

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z_j}{1 - \overline{z_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right| = 1,$$

故 $\prod_{j=1}^N \frac{\chi_1 - z_j}{1 - \overline{z_j}\chi_1}$ 是连续内函数, 并且 $\theta = \psi \prod_{j=1}^N (1 - \overline{z_j}\chi_1)$ 在 $\mathbb{T}$ 上的模恒为 1. 又 θ 在代数 H^∞ 中可逆, 即得 $\overline{\theta} = \theta^{-1}$ 在 H^∞ 中, 由此知 θ 为一常数. 故最终得

$$\varphi = \theta \prod_{j=1}^N \left(\frac{\chi_1 - z_j}{1 - \overline{z_j}\chi_1}\right),$$

它因而也是连续的. ■

7.36 定理 以 $\widehat{\varphi}$ 记 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 中函数 φ 在 $\mathbb{D}$ 上的调和扩张, 则 T_φ 是 Fredholm 算子当且仅当有正数 δ 和 ε 使得当 $1-\delta<r<1$ 时, $|\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \geqslant \varepsilon$. 此时, T_φ 的指标是 $1-\delta<r<1$ 时的曲线 $\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 关于原点绕数的负值.

证明 由推论 7.34 结合定理 6.45 得充要条件.

若 φ 是 H^∞ 中一个可逆函数, 取正数 ε 和 δ 使得当 $1-\delta<r<1$ 时,

$$|\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \geqslant \varepsilon.$$

选取 H^∞ 中一个函数 ψ 和一个负整数 N 使 $\|\varphi-\chi_N\psi\|_\infty<\varepsilon/3$. 当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时, 作 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中函数 $\varphi_\lambda=\lambda\varphi+(1-\lambda)\chi_N\psi$, 则 $\|\varphi-\varphi_\lambda\|_\infty<\varepsilon/3$, 当 $1-\delta<r<1$ 时, $|\widehat{\varphi}_\lambda(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\geqslant 2\varepsilon/3$. 根据定理 6.45, 诸 φ_λ 在 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中可逆. 因此 T_{φ_λ} 是 Fredholm 算子, 并且曲线 $\widehat{\varphi}_\lambda(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 关于原点的绕数与 $\lambda\in[0,1]$ 和 $r\in(1-\delta,1)$ 无关. 从而证明 $T_{\chi_N\psi}$ 的指标等于曲线 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mapsto\widehat{\chi_N\psi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 关于原点的绕数的负值即可.

注意到等式 $T_\psi=T_{\chi_{-N}}T_{\chi_N\psi}$, 我们知 T_ψ 为一个 Fredholm 算子. 取一个外函数 ψ_o 和一个内函数 ψ_i 使 $\psi=\psi_o\psi_i$, 则 T_{ψ_o} 可逆而 T_{ψ_i} 便为一个 Fredholm 算子. 因此根据前面引理 ψ_i 是连续的, 于是 $\chi_N\psi_i$ 在 $C(\mathbb{T})$ 中, 因而由定理 7.26 我们得到

$$j(T_{\chi_N\psi})=j(T_{\chi_N\psi_i})=-i_t(\chi_N\psi_i).$$

根据引理 6.4 知存在 δ_1 使得当 $\delta>\delta_1>0$ 且 $1-\delta_1<r<1$ 时,

$$|\widehat{\chi_N\psi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-\widehat{\chi_N\psi_i}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\widehat{\psi_o}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|<\varepsilon/3.$$

于是, 当 $1-\delta_1<r<1$ 时,

$$i_t(\widehat{\chi_N\psi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))=i_t(\widehat{\chi_N\psi_i}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))+i_t(\widehat{\psi_o}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})).$$

利用 $\widehat{\psi_o}$ 在 $\mathbb{D}$ 上无零点这一事实及定理 6.46, 我们便得到期望的结果. ■

在符号属于 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 的 Toeplitz 算子的讨论结束之前, 我们证明其本质谱的连通性. 尽管我们会对任意符号证明这一点, 但一个直接证明仍显得有意义.

7.37 推论 若 φ 为 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则 T_φ 的本质谱是连通的.

证明 由推论 7.34 知, λ 属于 T_φ 的本质谱当且仅当 $\varphi-\lambda$ 在 $H^\infty+C(\mathbb{T})$ 中不可逆. 因此据定理 6.45 知 λ 在 T_φ 的本质谱中当且仅当 $0<\delta<1$ 时, λ 落于以下集合

$$\operatorname{clos}\{\widehat{\varphi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):1>r>1-\delta\}.$$

注意到这些集合都是连通紧集, 证明即完成. ■

我们现在开始证明 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中任意函数为符号的 Toeplitz 算子的本质谱的连通性. 这个一般情况下的证明是相当艰难的, 我们先引入以下述引理.

7.38 引理　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个可逆函数, 则 T_φ 是一个 Fredholm 算子当且仅当 $T_{1/\varphi}$ 也是一个 Fredholm 算子; 此时, $j(T_\varphi) = -j(T_{1/\varphi})$.

证明　据推论 6.25, 存在一个外函数 ψ 和一个幺模函数 u 使 $\varphi = u\psi$. 根据命题 7.5,

$$T_{1/\varphi} = T_{\overline{u}} T_{1/\psi} = T_{1/\psi}^* T_\varphi^* T_{1/\psi}.$$

由定理 7.21 知 $T_{1/\psi}$ 是可逆的, 命题即得证. ■

连通性的证明是基于分析方程 $T_{\varphi-\lambda} f_\lambda = 1$ 和 $T_{1/(\varphi-\lambda)} g_\lambda = 1$ 的解 f_λ 和 g_λ. 我们期望观察那些使相应算子不可逆的 λ, 因而 f_λ 和 g_λ 的精确定义稍微有些复杂.

7.39 定义　若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 Toeplitz 算子 T_φ 的本质预解集 $\rho_e(T_\varphi)$ 是由那些使 $T_{\varphi-\lambda}$ 为 Fredholm 算子的复数 λ 组成的开集 (这据推论 7.12 知 $\varphi - \lambda$ 于 $L^\infty(\mathbb{T})$ 可逆, 从而 $\mathscr{R}(\varphi) \subseteq \sigma_e(T_\varphi)$). 若 $j(T_{\varphi-\lambda}) = n$, 命 $f_\lambda = T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}^{-1} 1$ 且 $g_\lambda = T_{\chi_{-n}/(\varphi-\lambda)}^{-1} 1$.

谱变量 λ 的介入还是第一次出现. 有关 f_λ 和 g_λ 的基本结果含于下述命题, 其中会证明函数 f_λ 是 λ 的某个一阶微分方程的解. 虽然 f_λ 是个 Banach 空间值的解析函数, 然而就我们的目的而言, 只须将它视为被 z 参数化了的复值解析函数族.

7.40 命题　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则 $\rho_e(T_\varphi)$ 中诸 λ 使 $f_\lambda g_\lambda = 1$ 且 $\mathbb{D}$ 中诸点 z 满足以下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \widehat{f}_\lambda(z) = \widehat{f}_\lambda(z) \cdot P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\lambda}}\right\}(z).$$

证明　由定义 7.39 得等式 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)} f_\lambda = 1$ 和 $T_{\chi_{-n}/(\varphi-\lambda)} g_\lambda = 1$, 从而 H_0^2 中有两族函数 u_λ 和 v_λ 使 $\chi_n(\varphi-\lambda) f_\lambda = 1 + \overline{u}_\lambda$ 且 $\chi_{-n} g_\lambda/(\varphi-\lambda) = 1 + \overline{v}_\lambda$. 这两式相乘后得

$$f_\lambda g_\lambda = 1 + (\overline{u_\lambda + v_\lambda + u_\lambda v_\lambda}).$$

因 $f_\lambda g_\lambda$ 属于 H^1 而 $u_\lambda + v_\lambda + u_\lambda v_\lambda$ 属于 H_0^1, 故 $f_\lambda g_\lambda = 1$. 由引理 6.16 知 $\widehat{f}_\lambda(z)\widehat{g}_\lambda(z) = 1$.

取值于 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的函数 $\lambda \mapsto \chi_n(\varphi-\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto \chi_{-n}/(\varphi-\lambda)$ 是解析的, 由推论 7.8 知取值于 H^2 的函数 f_λ 和 g_λ 关于 λ 解析. 对于等式 $\chi_n(\varphi-\lambda) f_\lambda = 1 + \overline{u_\lambda}$ 关于 λ 求导得

$$-\chi_n f_\lambda + \chi_n(\varphi-\lambda) f'_\lambda = \overline{u'_\lambda},$$

因而 $f_\lambda = (\varphi-\lambda) f'_\lambda - \chi_{-n} \overline{u'_\lambda}$, 此处 u'_λ 属于 H_0^2. 将此方程两端乘以 $g_\lambda/(\varphi-\lambda)$ 得

到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi-\lambda}=&\frac{1}{\varphi-\lambda}f_\lambda g_\lambda\\=&f'_\lambda g_\lambda-(\chi_{-n}\overline{u'_\lambda})(\chi_n(1+\overline{v_\lambda}))\\=&f'_\lambda g_\lambda-\overline{u'_\lambda}(1+\overline{v_\lambda}).\end{aligned}$$

因为 $f'_\lambda g_\lambda$ 属于 H^1, 又 $\overline{u'_\lambda}(1+\overline{v_\lambda})$ 属于 $\overline{H^1_0}$, 所以 $P(1/(\varphi-\lambda))=f'_\lambda g_\lambda$. 左式两端乘以 f_λ, 我们得到方程 $f'_\lambda=f_\lambda P(1/(\varphi-\lambda))$. 注意到在 $\mathbb{D}$ 中点 z 处赋值和对于 λ 求导交换这一事实, 即得到了所要求的结果. ■

以下结论表明在 $\rho_e(T_\varphi)$ 诸分支中可以求解上面最后获得的 f_λ 满足的方程.

7.41 推论 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 而 λ 和 λ_0 是 $\rho_e(T_\varphi)$ 中一条可求长曲线 Γ 的端点, 则对于 $\mathbb{D}$ 中每个 z 成立以下等式

$$\widehat{f}_\lambda(z)=\widehat{f}_{\lambda_0}(z)\exp\left\{\int_\Gamma P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\mu}}\right\}(z)\mathrm{d}\mu\right\}$$

和

$$\widehat{g}_\lambda(z)=\widehat{g}_{\lambda_0}(z)\exp\left\{-\int_\Gamma P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\mu}}\right\}(z)\mathrm{d}\mu\right\}.$$

证明 任给 $\mathbb{D}$ 中 z 和 λ 的解析函数 $F(\lambda)$, 我们求解一阶线性常微分方程

$$\mathrm{d}x(\lambda)/\mathrm{d}\lambda=F(\lambda)x(\lambda)$$

得到 f_λ 满足的结论, 而 g_λ 对应的结论源自等式 $\widehat{f}_\lambda(z)\widehat{g}_\lambda(z)=1$. ■

现在我们来证明 $\rho_e(T_\varphi)$ 中的曲线都不能分开 $\mathscr{R}(\varphi)$.

7.42 命题 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 而 C 为落于 $\rho_e(T_\varphi)$ 中一条可求长简单闭曲线, 则 $\mathscr{R}(\varphi)$ 要么全位于该曲线 C 的内部, 要么全位于外部.

证明 考虑 $\mathbb{D}$ 上如下定义的解析函数

$$F:z\mapsto\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\mu}}\right\}(z)\mathrm{d}\mu.$$

固定 C 上一个点 λ_0, 由上述推论知 $\mathbb{D}$ 中诸点 z 使

$$\widehat{f}_{\lambda_0}(z)=\widehat{f}_{\lambda_0}(z)\exp\{2\pi\mathrm{i}F(z)\}.$$

只要 $\widehat{f}_{\lambda_0}$ 在某点 z 不取零值, 必有 $\exp\{2\pi\mathrm{i}F(z)\}=1$. 注意到 $\widehat{f}_{\lambda_0}$ 是解析函数, 左式对于 $\mathbb{D}$ 中每个点 z 都成立. 这表明 $F(z)$ 是整数值函数, 因而等于某个常数 N.

考虑 $\mathbb{T}$ 上如下几乎处处有意义的函数

$$\psi:\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mapsto\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{1}{\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-\mu}\mathrm{d}\mu,$$

其函数值等于曲线 C 关于点 $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 绕数的负值. 现在

$$\begin{aligned}P\psi &= P\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{1}{\varphi-\mu}\mathrm{d}\mu\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C P\left\{\frac{1}{\varphi-\mu}\right\}\mathrm{d}\mu = F,\end{aligned}$$

它是常值函数. 因此 ψ 与一个常值函数几乎处处相等, 这表明 C 关于 $\mathscr{R}(\varphi)$ 中诸点有常值绕数. 因而 $\mathscr{R}(\varphi)$ 要么全部落于 C 的内部, 要么全部落于外部. ■

剩余的证明部分在于说明解能解析扩张至 $\mathbb{C}\backslash\rho_e(T_\varphi)$ 的任一不包含 $\mathscr{R}(\varphi)$ 的连通分支上. 在证此之前我们需要将 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}$ 的逆算子与函数 f_λ 和 g_λ 联系起来.

7.43 引理 设 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 而 k 是 H^∞ 中一个函数. 对于 $\rho_e(T_\varphi)$ 中 λ, 命 $n=j(T_{\varphi-\lambda})$, 则 H^2 中存在函数 $h_\lambda = f_\lambda P\{\chi_{-n}g_\lambda k/(\varphi-\lambda)\}$ 使 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}h_\lambda = k$.

证明 命 $h_\lambda = T^{-1}_{\chi_n(\varphi-\lambda)}k$, 则存在 $l\in H_0^2$ 使 $\chi_n(\varphi-\lambda)h_\lambda = k+\bar{l}$, 利用命题 7.40 证明中的记号, 上式乘以 $\chi_{-n}g_\lambda/(\varphi-\lambda) = 1+\overline{v_\lambda}$ 得到

$$g_\lambda h_\lambda = \frac{1}{\varphi-\lambda}\chi_{-n}g_\lambda k + \bar{l}(1+\overline{v_\lambda}).$$

注意到 $l(1+v_\lambda)$ 属于 H_0^1, 可得 $g_\lambda h_\lambda = P\{\chi_{-n}g_\lambda k/(\varphi-\lambda)\}$, 在此式两边同乘 f_λ 并利用等式 $f_\lambda g_\lambda = 1$ 得到要求的结果. ■

在证明本质谱的连通性之前, 还需要一个引理.

7.44 引理 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的一个单连通开集且 C 为其中一条可求长简单闭曲线. 设 $\Omega\times\mathbb{D}$ 上有复函数 $F_\lambda(z)$ 使得当 z_0 属于单位开圆盘 $\mathbb{D}$ 时, $F_\lambda(z_0)$ 是 Ω 上解析函数; 当 λ_0 属于 Ω 时, $F_{\lambda_0}(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上解析函数. 若当 λ_0 属于 C 时, F_{λ_0} 是 H^2 中函数使 $\sup\limits_{\lambda_0\in C}\|F_{\lambda_0}\|_2<\infty$, 则当 λ 属于 C 的内部时, F_λ 在 H^2 中且 $\|F_\lambda\|_2 \leqslant \sup\limits_{\lambda_0\in C}\|F_{\lambda_0}\|_2$.

证明 对于 $\mathbb{D}$ 上一个解析函数 ψ, 命 $f=\sum\limits_{n=0}^\infty \varphi^{(n)}(0)(n!)^{-1}\chi_n$, 它属于 H^2 当且仅当

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{|\psi^{(n)}(0)|^2}{(n!)^2} < +\infty.$$

此时, $\widehat{f}=\psi$ 且 $\|f\|_2 = \left(\sum\limits_{n=0}^\infty \dfrac{|\psi^{(n)}(0)|^2}{(n!)^2}\right)^{1/2}$.

若 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 为任意复数, 则当 $0<r<1$ 时,

$$\sum_{k=0}^N \frac{F_\lambda^{(k)}(0)}{k!}\overline{\alpha_k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_\lambda(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{\sum_{k=0}^N \frac{1}{r^k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\alpha_k\mathrm{d}t}$$

是 λ 的一个解析函数. 对于 λ 的解析函数使用最大模原理知

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\frac{F_\lambda^{(k)}(0)}{k!}\overline{\alpha_k}\right| \leqslant \sup_{\lambda_0\in C}\left|\sum_{k=0}^{N}\frac{F_\lambda^{(k)}(0)}{k!}\overline{\alpha_k}\right|$$
$$\leqslant \sup_{\lambda_0\in C}\|F_{\lambda_0}\|_2(\sum_{k=0}^{N}|\alpha_n|^2)^{1/2}.$$

由此可见

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\left|\frac{F_\lambda^{(k)}(0)}{k!}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \sup_{\lambda_0\in C}\|F_{\lambda_0}\|_2,$$

这正是我们要证明的. ■

7.45 定理 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则 T_φ 的本质谱为 $\mathbb{C}$ 的一个连通子集.

证明 我们只需证明当 C 为落于 $\rho_e(T_\varphi)$ 中一条可求长简单闭曲线使 $\mathscr{R}(\varphi)$ 落于其外内部时, 位于 C 的内部中诸点 λ 使 $T_{\varphi-\lambda}$ 为 Fredholm 算子. 命 Ω 为包含 C 及 C 的内部的一个单连通开集使它不包含本质谱 $\sigma_e(T_\varphi)$ 在 C 外部的任一点. 我们要证明 $\sigma_e(T_\varphi)$ 与 Ω 是不交的.

固定 C 上一点 λ_0, 对于 Ω 中每一点 λ, 命 Γ 是 Ω 内以 λ_0 和 λ 为端点的可求长简单曲线. 对于 $z\in\mathbb{D}$, 由于 $P(\widehat{\varphi-\mu})^{-1}(z)$ 关于单连通区域 Ω 中 μ 是解析的, 可定义

$$F_\lambda(z)=\widehat{f}_{\lambda_0}(z)\exp\left\{\int_\Gamma P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\mu}}\right\}(z)\mathrm{d}\mu\right\}$$

和

$$G_\lambda(z)=\widehat{g}_{\lambda_0}(z)\exp\left\{-\int_\Gamma P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\mu}}\right\}(z)\mathrm{d}\mu\right\}.$$

据推论 7.41, C 的某邻域中诸 λ 使 $F_\lambda(z)=\widehat{f}_\lambda(z)$, 据上述引理, 诸 $\lambda\in\Omega$ 使 F_λ 属于 H^2. 相仿地知诸 $\lambda\in\Omega$ 使 G_λ 属于 H^2. 考虑 Ω 上函数 $\psi:\lambda\mapsto T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}F_\lambda-1$, 它取值于 H^2. 对于 $z\in\mathbb{D}$, 复值函数 $\psi(\lambda)(z)$ 关于 Ω 中 λ 是解析的并在 C 的一个邻域上恒为零. 因此诸 $\lambda\in\Omega$ 使 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}F_\lambda=1$, 类似知这 λ 也使 $T_{\chi_{-n}(\varphi-\lambda)^{-1}}G_\lambda=1$.

若 k 为 H^∞ 中一个函数, 则可定义满足上述引理假设的一个函数

$$H_\lambda(z)=F_\lambda(z)P\left\{\widehat{\frac{1}{\varphi-\lambda}\chi_{-n}G_\lambda k}\right\}(z).$$

因此 H_λ 属于 H^2 且诸 $\lambda\in\Omega$ 使 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}H_\lambda=k$. 我们又有

$$\|H_\lambda\|_2\leqslant\sup_{\lambda_0\in C}\|H_{\lambda_0}\|_2\leqslant\sup_{\lambda_0\in C}\|T^{-1}_{\chi_n(\varphi-\lambda_0)}\|\|k\|_2.$$

因此, 若 k 属于 H^2 且 $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H^∞ 中一序列使 $\lim\limits_{j\to\infty}\|k-k_j\|_2=0$, 则诸 $\lambda\in\Omega$ 使函数列 $\{H_\lambda^j\}_{j=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列, 从而收敛至某一函数 H_λ 使 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}H_\lambda=k$. 可见, 诸 $\lambda\in\Omega$ 使 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}$ 为到上的. 同样的论证适用于 $\overline{\Omega}$ 中诸 $\overline{\lambda}$, 即算子 $T_{\chi_{-n}(\overline{\varphi}-\overline{\lambda})}$ 也是到上的, 因此 $T_{\chi_n(\varphi-\lambda)}$ 可逆, 因而 $T_\varphi-\lambda$ 是 Fredholm 算子, 这正是要证明的. ■

7.46 推论 (Widom)　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则谱 $\sigma(T_\varphi)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个连通子集.

证明　由命题 7.24, T_φ 的谱是本质谱并上那些使 $T_\varphi-\lambda I$ 为 Fredholm 算子且有非零指标的 λ. 注意到对于本质谱补集中任一连通分支中 λ, 算子 $T_\varphi-\lambda I$ 依 λ 有常值指标, 由此知谱由一个紧连通集及其补集中某些连通分支并成, 因而是连通的. ■

尽管前面关于连通性的证明是出色的, 但是有两点使我们看到它不是完全令人满意的. 首先这个证明没有给我们提示为什么这个结果是正确的. 第二, 这个证明似乎依赖于证明某个双复变量函数的某类奇点全体是连通的, 且用这些述语来描述这个结果是值得期待的.

在结束本章前, 我们将给出一个有着完全不同内在特质的结果, 我们确信此类结果在 Toeplitz 算子理论的深入研究中很重要. 它涉及一个 “局部化” 概念, 并指出了为理解某些涉及 Toeplitz 算子的现象, 有必要考虑 C*- 代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的另一种表示.

我们首先以有非平凡中心的 C*- 代数的一个结果展开这方面的讨论. 一个代数的中心是该代数的一个子代数, 它由与该代数中诸元交换的一切元素所组成. 在证明中我们将用到这样一个事实: 抽象 C*- 代数都可等距 *- 同构地表示成某个 Hilbert 空间上一个算子代数. 进而, 我们还需要知道 $C(X)$ 的每个 *- 同构能够扩张到 X 上有界 Borel 函数代数上. 尽管我们在正文中没有证明这些结果, 但是证明概要已安排于第 4 章习题和第 5 章习题.

7.47 定理　设 C*- 代数 $\mathfrak{T}$ 与其中心的某个 C*- 子代数 $\mathfrak{A}$ 有相同单位元. 对于 $\mathfrak{A}$ 的极大理想空间 $M_{\mathfrak{A}}$ 中每个点 x, 以 $\mathfrak{J}_x$ 记 $\mathfrak{A}$ 的极大理想 $\{A\in\mathfrak{A}:\widehat{A}(x)=0\}$ 在 $\mathfrak{T}$ 中生成的闭理想, 则

$$\bigcap_{x\in M_{\mathfrak{A}}}\mathfrak{J}_x=\{0\}.$$

特别地, 以 Φ_x 记 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 上的自然 *- 同态, 则 $\sum\limits_{x\in M_{\mathfrak{A}}}\oplus\Phi_x$ 是 $\mathfrak{T}$ 到 $\sum\limits_{x\in M_{\mathfrak{A}}}\oplus\mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 内的一个等距 *- 同构. 进而, T 在 $\mathfrak{T}$ 中可逆当且仅当诸 $x\in M_{\mathfrak{A}}$ 使 $\Phi_x(T)$ 在 $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 中可逆.

证明　据命题 4.67, 只需证诸 $T\in\mathfrak{T}$ 使 $\sup\limits_{x\in M_{\mathfrak{A}}}\|\Phi_x(T)\|=\|T\|$. 否则, 存在

$T \in \mathfrak{T}$ 和一个正数 ε 使 $\|T\| - \sup_{x \in M_{\mathfrak{A}}} \|\Phi_x(T)\| = \varepsilon$. 对于 $x \in M_{\mathfrak{A}}$, 以 O_x 记如此 SA 全体, 此处 S 属于 $\mathfrak{T}$ 而 A 属于 $\mathfrak{A}$ 且 $\widehat{A}$ 在 x 的某个邻域 U 上恒为零. 于是 O_x 是 $\mathfrak{T}$ 中含于 $\mathfrak{J}_x$ 的一个理想, 其闭包包含 $\{A \in \mathfrak{A} : \widehat{A}(x) = 0\}$. 可见, $\mathfrak{J}_x = \operatorname{clos}[O_x]$. 因此有 $\mathfrak{T}$ 中某 S 和 $\mathfrak{A}$ 中某 A 使 $\widehat{A}$ 在 x 的一个开邻域 U_x 上恒为零且

$$\|\Phi_x(T)\| + \varepsilon/3 > \|T + SA\|.$$

取 $M_{\mathfrak{A}}$ 的一个有限覆盖 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^N$ 及 $\mathfrak{T}$ 中相应元素 $\{S_i\}_{i=1}^N$ 和 $\mathfrak{A}$ 中相应元素 $\{A_i\}_{i=1}^N$ 使

$$\|T\| - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \|\Phi_{x_i}(T)\| + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \|T + S_i A_i\|$$

且 $\widehat{A}_i$ 在 U_{x_i} 上为零, $1 \leqslant i \leqslant N$.

取 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 使 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 存在等距 *- 同态 Φ, 则 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 到 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ 存在等距 *- 同态 $\psi_0 : f \mapsto \Phi(\Gamma^{-1} f)$, 此处 Γ 为 $\mathfrak{A}$ 到 $C(M_{\mathfrak{A}})$ 的 Gelfand 变换. 因为 $\Phi(\mathfrak{A})$ 落于 $\Phi(\mathfrak{T})$ 的换位, 所以 $\psi_0(C(M_{\mathfrak{A}}))$ 落于 $\Phi(\mathfrak{T})$ 的换位. 因此 ψ_0 可扩张成从 $M_{\mathfrak{A}}$ 上有界 Borel 函数代数 $B(M_{\mathfrak{A}})$ 到 $\Phi(\mathfrak{T})$ 的换位的一个 *- 同态 ψ,.

取 $M_{\mathfrak{A}}$ 的一个 Borel 划分 $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ 使得当 $i = 1, 2, \cdots, N$ 时, Δ_i 落于 U_{x_i} 中, 于是

$$\Phi(T + S_i A_i)\psi(I_{\Delta_i}) = \Phi(T)\psi(I_{\Delta_i}),$$

因此当 $1 \leqslant i \leqslant N$ 时, 有

$$\|\Phi(T)\psi(I_{\Delta_i})\| \leqslant \|\Phi(T + S_i A_i)\| \|\psi(I_{\Delta_i})\| \leqslant \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $\{\psi(I_{\Delta_i})\}_{i=1}^N$ 是一簇约化 $\Phi(T)$ 的交换投影算子并且 $\sum_{i=1}^N \psi(I_{\Delta_i}) = I_{\mathscr{H}}$, 即得

$$\Phi(T) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \|\Phi(T)\psi(I_{\Delta_i})\|,$$

从而 $\|\Phi(T)\| \leqslant \|T\| - \varepsilon/2$. 由于 Φ 是等距映射, 这导致矛盾.

若 T 于 $\mathfrak{T}$ 可逆, 显然 $M_{\mathfrak{A}}$ 中诸点 x 使得 $\Phi_x(T)$ 于 $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 可逆. 反之, 设 $M_{\mathfrak{A}}$ 中诸点 x 使得 $\Phi_x(T)$ 于 $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 可逆. 由定理 4.28 知存在 $S \in \mathfrak{T}$ 使 $\Phi_x(ST - I) = 0$. 重复第一段的论证, 我们得到 x 的一个邻域 O_x 使诸 $z \in O_x$ 满足 $\|\Phi_z(ST - I)\| < 1/2$, 此时, 由命题 2.5 知 $\Phi_z(ST)$ 可逆且 $\|\Phi_z(ST)^{-1}\| < 2$. 这样 $\Phi_z(T)$ 有逆 $\Phi_z(ST)^{-1}\Phi_z(S)$, 因而 $\|\Phi_z(T)^{-1}\|$ 在 O_x 上是一致有界的. 由标准的紧性方法知 $\sup_{x \in M_{\mathfrak{A}}} \|\Phi_x(T)^{-1}\| < \infty$. 可见, $\sum_{x \in M_{\mathfrak{A}}} \oplus \Phi_x(T)$ 在 $\sum_{x \in M_{\mathfrak{A}}} \oplus \mathfrak{T}/\mathfrak{J}_x$ 中可逆, 因而根据定理 4.28 知 T 于 $\mathfrak{T}$ 可逆. ■

7.48 我们期望应用上述结果的背景如下. 尽管 C*- 代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的中心是由恒等算子生成的, 然而商代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 有非平凡中心, 根据命题

7.22, 此中心包含了商代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$, 这同构于 $C(\mathbb{T})$. 因此我们能将商代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$"局部化" 到 $\mathbb{T}$ 中诸点.

对于 $\lambda \in \mathbb{T}$, 命 $\mathfrak{J}_\lambda$ 为 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的子集 $\{T_\varphi : \varphi \in C(\mathbb{T}), \varphi(\lambda) = 0\}$ 生成的闭理想. 并命 $\mathfrak{T}_\lambda$ 为商代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{J}_\lambda$, 又以 Φ_λ 记由 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 至 $\mathfrak{T}_\lambda$ 的自然 *- 同态.

7.49 定理 所有 C*- 代数 $\mathfrak{T}_\lambda$ 是相互 *- 同构的. 设 Φ 为 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 至 $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{T}} \oplus \mathfrak{T}_\lambda$ 的 *- 同态 $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{T}} \oplus \Phi_\lambda$, 则以下序列

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{LC}(H^2) \longrightarrow \mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \xrightarrow{\Phi} \sum_{\lambda\in\mathbb{T}} \oplus \Phi_\lambda$$

在 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 处正合.

证明 因为 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 是 H^2 上一个不可约代数, 所以由定理 5.39 知它的非零闭理想都包含紧算子理想 $\mathfrak{LC}(H^2)$. 特别地, Φ 的核包含 $\mathfrak{LC}(H^2)$, 故 Φ 诱导从商代数 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 到 $\sum\limits_{\lambda\in T} \oplus \mathfrak{T}_\lambda$ 内的一个 *- 同态 Φ_c. 因为 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 落于 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 的中心, 故使用上述定理我们即得 Φ_C 是 *- 同构的. 在 $\mathbb{T}$ 上用 λ 所作的旋转显然诱导 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 的一个自同构, 这个自同构将 $\mathfrak{J}_1$ 映满 $\mathfrak{J}_\lambda$, 因而从 $\mathfrak{T}_1$ 到 $\mathfrak{T}_\lambda$ 上存在 *- 同构. ■

上述结果的效用在于这样一个事实, 它把关于 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ 中算子模掉紧算子的一切问题都归结为 $\mathfrak{T}_\lambda$ 上相应问题. 不幸的是, 我们关于代数 $\mathfrak{T}_\lambda$ 知之不多. 以下命题将指明 $\mathfrak{T}_\lambda$ 中算子仅依赖于相应定函数的局部性质.

我们回忆集合 $M_\infty \backslash \mathbb{D}$ 可在圆周上按下述方式纤维化:

$$F_\lambda = \{m \in M_\infty : \widehat{\chi}_1(m) = \lambda\}$$

并且 H^∞ 的 Šilov 边界可等同于 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的极大理想空间 M_{L^∞}. 现将 $F_\lambda \bigcap M_{L^\infty}$ 记为 ∂F_λ.

7.50 命题 若 $\{\varphi_{i,j}\}_{i,j=1}^N$ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一些函数使在 M_{L^∞} 上有相应 Gelfand 变换 $\widehat{\varphi}_{i,j}$, 则诸 $\lambda \in \mathbb{T}$ 使 $\Phi_\lambda(\sum\limits_{i=1}^N \prod\limits_{j=1}^N T_{\varphi_{i,j}})$ 仅依赖于这些函数 $\{\widehat{\varphi}_{i,j}|_{\partial F_\lambda}\}_{i,j=1}^N$.

证明 只需证明使 $\widehat{\varphi}|_{\partial F_\lambda} = 0$ 的 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中函数 φ 必使 $\Phi_\lambda(T_\varphi) = 0$. 对于 $\varepsilon > 0$, 根据连续性和紧性得 $\mathbb{T}$ 中包含点 λ 的开孤 U 使 $\|\varphi I_U\|_\infty < \varepsilon$. 若 $\mathbb{T}$ 上连续函数 ψ 在 U 的补集上取值 1 而在 λ 处取零值 0, 则

$$T_\varphi = T_{\varphi I_U} + T_{\varphi I_{\mathbb{T}\backslash U}(1-\psi)} + T_{\varphi I_{\mathbb{T}\backslash U}\psi},$$

由 T_ψ 属于 $\mathfrak{J}_\lambda$ 得 $\Phi_\lambda(T_{\varphi I_{\mathbb{T}\backslash U}\psi}) = \Phi_\lambda(T_{\varphi I_{\mathbb{T}\backslash U}})\Phi_\lambda(T_\psi) = 0$, 结合 $I_{\mathbb{T}\backslash U}(1-\psi) = 0$ 得

$$\|\Phi_\lambda(T_{\varphi I_U})\| \leqslant \|T_{\varphi I_U}\| < \varepsilon, \quad \Phi_\lambda(T_{\varphi I_{\mathbb{T}\backslash U}(I-\psi)}) = 0.$$

可见, 诸 $\varepsilon > 0$ 使 $\|\Phi_\lambda(T_\varphi)\| < \varepsilon$, 于是 $\Phi_\lambda(T_\varphi) = 0$. ■

作为推论我们将得到下面一些结果, 它们源自对于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 情形的“局部化处理”.

7.51 推论　若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 T_φ 是 Fredholm 算子当且仅当对于 $\mathbb{T}$ 中诸 λ, 代数 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中存在函数 ψ 使 T_ψ 是 Fredholm 算子且 $\widehat{\varphi}|_{\partial F_\lambda} = \widehat{\psi}|_{\partial F_\lambda}$.

证明　由定理 7.49 和定义知 T_φ 是 Fredholm 算子当且仅当诸 $\lambda \in \mathbb{T}$ 使 $\Phi_\lambda(T_\varphi)$ 可逆. 若 λ 属于 $\mathbb{T}$ 时, $L^\infty(\mathbb{T})$ 中存在函数 ψ 使 T_ψ 为 Fredholm 算子且 $\widehat{\varphi}|_{\partial F_\lambda} = \widehat{\psi}|_{\partial F_\lambda}$, 根据上述命题知 $\Phi_\lambda(T_\psi)$ 不仅等于 $\Phi_\lambda(T_\varphi)$ 并且在 $\mathfrak{T}_\lambda$ 中可逆, 因此本推论源自定理 7.47. ■

7.52 推论　设 φ 和 ψ 均为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中函数. 若当 λ 属于 $\mathbb{T}$ 时, 或者 $\overline{H^\infty}$ 中存在函数 θ_1 使 $(\widehat{\varphi} - \widehat{\theta}_1)|_{\partial F_\lambda} \equiv 0$, 或者 H^∞ 中存在函数 θ_2 使 $(\widehat{\psi} - \widehat{\theta}_2)|_{\partial F_\lambda} \equiv 0$, 则 $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ 为一紧算子.

证明　据定理 7.49, $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ 为紧的当且仅当诸 $\lambda \in \mathbb{T}$ 使 $\Phi_\lambda(T_\varphi)\Phi_\lambda(T_\psi) = \Phi_\lambda(T_{\varphi\psi})$. 至此, 由命题 7.5 即可看到本推论为真. ■

注　记

Toeplitz 在其一篇早期论文 [109] 中研究了一类在诸对角线上为常值的有限阶矩阵及其与单向无限矩阵和双向无限矩阵的对应关系. 这一研究方向的基本定理得自 Szegö[54], 早期的大部分研究也关注于这类问题. Wintner[116] 确定了解析 Toeplitz 矩阵的谱, 约二十年后他和 Hartman 在两篇论文 [59] 和 [60] 中为本章大部分内容定了基调. 强调用映射 $\varphi \mapsto T_\varphi$ 对于 Toeplitz 算子进行系统研究的工作是由 Brown 和 Halmos 在 [11] 中完成的. 对于这些问题的所谓代数处理首次明确地出现在 [29] 和 [30] 中, 这也基于 Coburn 稍早的论文 [17] 和 [18]①.

从 Wiener 和 Hopf[115] 的奠基性工作开始以来, 有大量关于 Wiener-Hopf 算子的文献. 这方面早期的工作主要集中于研究显式算子或带有光滑核函数的算子, 沿此方向的发展和当时的文献可参见 Kreĭn 的漂亮综述 [27]. 一直到 Rosenblum[94] 发现利用 Laguerre 多项式可将两类算子酉等价之前, Toeplitz 算子和 Wiener-Hopf 算子的研究是平行发展的. 随后 Devinatz 在 [25] 中明确指出将单位圆映成上半平面的典型共型映射建立了 Toeplitz 算子和 Wiener-Hopf 算子的 Fourier 变换之间的酉等价关系. 因此, 一给定的结论既可叙述于 Toeplitz 算子环境也可用叙述于 Wiener-Hopf 算子环境.

谱包含定理应归于 Hartman 和 Wintner[60], 只是本章对于命题 7.6 的证明首

①事实上这种研究方法属于 Gohberg [On an application of the theory of normed rings to singular integral equations, *Uspekhi Mat. Nauk.* 7, 149-156 (1952)] 和 [On the number of solutions of a homogeneous singular integral equation with continuous coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 122, 327-330 (1968)].

见于 [110]. 推论 7.8 和推论 7.19 以及 7.9 后的评注属于 Brown 和 Halmos[11]. 定理 7.11 中同态的存在性及其在这些问题中的作用确立于 [31]. Stampfli[103] 观察到 Coburn[17] 的一个证明事实上推出了命题 7.22. 至于 C*- 代数 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 的分析则是由 Coburn[17] 和 [18] 完成的, 而它对于具有连续符号的 Toeplitz 算子可逆性问题的应用由 [29] 观察到.① 命题 7.24 是由 Coburn 在 [16] 中证明的. 而推论 7.27 的内容则是若干作者工作的复述, 这包括 Kreĭn [72], Calderon, Spitzer 和 Widom[13], Widom[110], 和 Devinatz[24]. 本书中给出的证明首见于 [29] 且独立地出现于 [3], 在 [3] 中 Atiyah 将类似矩阵的工具用于周期性定理的证明. 一个相关的证明也由 Gohberg 和 Fel'dman[45] 中给出. 具有 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 符号的 Toeplitz 算子的研究在 [30] 中做出, 相关补充材料则在 [77] 和 [103].

定理 7.30 中叙述的可逆性准则及其推论是由 Widom[111] 和 Devinatz[24] 独立做出的, 他们是基于 Helson 和 Szëgo[64] 在预测理论中的研究. 定理 7.32 中给出的谱包含定理则是基于 Lee 和 Sarason[77] 对于著者 [31] 一个结果的推广. Toeplitz 算子的谱的连通性问题是由 Halmos[57] 提出并由 Widom[113] 和 [114] 所回答的. 定理 7.45 的证明是 [114] 中所作的稍微改动以适合于本质谱并避开了某些测度论方面的考虑及调和共轭的作用. 本质谱有连通的可能性是由 Abrahamse 向著者建议的.

定理 7.47 与 C*- 代数 ②的各种中心分解 (参见 [96]) 密切相联, 但将它用于 Toeplitz 算子还是第一次, 并且这些结果是由早期的推论 7.51 和推论 7.52 所启发的, 前一个推论属于 Simonenko [102] 并独立地由 Douglas 和 Sarason[35] 得到, 它还推广了由 Douglas 和 Widom 在 [38] 得到的一个结果. 后一个推论属于 Sarason[98].

在此应提及 Toeplitz 算子理论的若干深入发展和其他一些论题. 符号属于分段连续函数代数的可逆性问题已由 Widom[110], Devinatz[24] 考虑过, 从代数观点考察这个问题则由 Gohberg 和 Krupnik[50] 考虑过. 可逆性问题对于直线环境上自然出现的某些函数代数也有所研究. 殆周期函数代数独立地由 Coburn 和 Douglas[19] 以及 Gohberg 和 Fel'dman[46], [47] 所研究. 事实上后面两位作者研究了无连续奇异部分的测度的 Fourier 变换. 至于任意测度的 Fourier 变换问题则是由 Douglas 和 Taylor[37] 利用后者 [108] 关于测度的卷积代数的极大理想空间上一个上同调的深刻结果而解决的. 最后, Lee 和 Sarason[77] 以及 Douglas 和 Sarason[36] 研究了形如 $\varphi\overline{\psi}$ 的某类函数情形对应的可逆性问题, 此处 φ 和 ψ 为内函数.

Toeplitz 算子概念已由多人作了相当可观的推广: Douglas 和 Pearcy[33] 研究

②在 Banach 代数范畴里萌发这种思想的较早结果属于 I. Kaplansky [The structure of certain operator algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70, 219-255 (1951)], G. R. Allan [Ideals of vector-valued function, *Proc. London. Math. Soc.* (3) 18, 193-216 (1968)] 和 J. Dans-R. H. Hoffman [Representation of rings by sections. *Memoirs. Amer. Math. Soc.*, 93 Providence, R. I., 1968].

了 F. & M. Riesz 定理的作用; Devinatz 研究了某个 Dirichlet 代数 [24] 的 H^2- 空间上 Toeplitz 算子. Devinatz 和 Shinbrot[26] 研究了算子压缩到子空间后的可逆性; 而 Abrahamse[1] 研究了平面的有限连通区域的 H^2- 空间上 Toeplitz 算子. 另一类推广来自对于 Wiener-Hopf 算子的观察. 给定阿贝尔群的一个子半群, 将卷积算子压缩到由该半群支撑的函数组成的 L^2- 空间所得算子也有研究. 相当任意半群上某些基本结果是由 Coburn 和 Douglas[20] 得到的. 涉及半空间的早期工作应归于 Goldenstein 和 Gohberg[52] 和 [53]. 四分之一平面的情况特别重要且与定义在双圆盘的 H^2 上 Toeplitz 算子相一致. 有关这方面的若干结果见于 Simonenko[101], Osher[84], Malyšev[78], Strang[106] 和 Dauglas 与 Howe[32]. 特别地, 后两位作者还得到了这一类 Toeplitz 算子为 Fredholm 的充要条件. 进而, 他们证明了虽然这类算子必有指标零, 但不必可逆.

在前面很多背景中, 符号的各种拓扑不变量参与了确定相应算子何时可逆, 而通常这些不变量必须为零. 在单位圆盘上连续符号这一情形时, 一个非零不变量对应着算子成为 Fredholm 且有非零指标. 对其他算子类型建立类似结果的起点性工作也已由 Coburn, Douglas, Schaeffer 和 Singer 在 [21] 中展开, 他们用到了 Breuer(见 [8],[9]) 引入的广义 Fredholm 算子概念. 人们期望这类问题在今后的发展中能显示起重要性.

虽然本书仅限于关注标量情形, 但矩阵情形可能更为重要. 此时, 函数 φ 允许取值 $n\times n$ 矩阵, 并且作用在 $\mathbb{C}^n$- 值的 H^2- 空间上. 本章的许多方法通过张量积途径可转移到这种情形. 更专业地, 若 $\mathfrak{A}$ 为标量函数的一个代数, $\mathfrak{A}_n$ 记 $\mathfrak{A}\otimes M_n$, 此处 M_n 是 n- 维 Hilbert 空间 $\mathbb{C}^n$ 上算子全体所成的 C*- 代数, 更重要地, $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}_n)$ 等距同构于 $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})\otimes M_n$. 特别地, 使用这一点到本章中正合列之一, 我们得到正合列

$$\{0\}\longrightarrow \mathfrak{LC}(H^2)\otimes M_n\longrightarrow \mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))\otimes M_n\longrightarrow C(\mathbb{T})\otimes M_n\longrightarrow\{0\}.$$

(“标量” 序列有个连续截面的事实也用到了.) 因为 $\mathfrak{LC}(H^2)\otimes M_n$ 等于 $\mathfrak{LC}(H^2\otimes\mathbb{C}_n)$, 我们得到具有连续符号的一个矩阵 Toeplitz 算子为 Fredholm 算子当且仅当行列式函数在圆周上无零点. 进而, 能证明相应的指标等于行列式函数关于原点绕数的负值. (这后一论证用到下述事实: 从 $\mathbb{T}$ 到 $n\times n$ 可逆矩阵的诸连续映射同伦于 $\mathbb{T}$ 到可逆对角阵的某个映射.)

上述这个结果属于 Gohberg 和 Kreĭn[49]. 这到某类算子值矩阵的推广见于 [31]. 关于矩阵或算子值矩阵情形的其他一些结果可参看 [87] 和 [88].

最后, 尽管本节没有专门评论它, 对于 Toeplitz 算子和 Wiener-Hopf 算子的研究在物理和概率 (见 [54], [69], [83]) 以及对于解偏微分方程的某些差分格式的收敛性检验 (见 [83]) 诸领域也很重要.

习　题

习题 7.1　若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 均为 C*- 代数, ρ 为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的一个等距 *- 线性映射, 则 $\mathfrak{A}$ 中诸元 T 满足 $\sigma(T) \subseteq \sigma(\rho(T))$. (提示: 若 T 于 $\mathfrak{A}$ 不左可逆, 则 $\mathfrak{A}$ 有个序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\|S_n\| = 1$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n T\| = 0$.) 若 $\mathfrak{A}$ 还是交换的, 则诸 $T \in \mathfrak{A}$ 满足 $\sigma(\rho(T)) \subseteq h[\sigma(T)]$.

习题 7.2　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个非常值实函数, 则 T_φ 没有本征值.

习题 7.3　代数 $\mathfrak{L}(H^2)$ 中一个算子 T 为一个 Toeplitz 算子当且仅当 $T_{\chi_1}^* T T_{\chi_1} = T$.

习题 7.4　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个非零函数, 则 M_φ 和 T_φ 没有公共本征值.

习题 7.5　若 φ 属于 L^∞ 且为一实值函数, 则 T_φ 可逆当且仅当常值函数 1 在其值域中.

习题 7.6　若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 $\overline{W(T_\varphi)} = h[\mathscr{R}(\varphi)]$.

习题 7.7　若 φ_1, φ_2 和 φ_3 均是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中函数使 $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_3}$ 为一个紧算子, 则 $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_3$.

定义　若 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界复数序列, 规定相关 Hankel 矩阵$\{\alpha_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}$ 使 $\alpha_{i,j} = \alpha_{i+j} : i, j \geqslant 0$.

习题 7.8 (Nehari)　若 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一个有界复数序列, 则相关 Hankel 矩阵定义的 Hankel 算子H 是有界的当且仅当存在函数 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

此时, H 的范数等于满足上述条件诸函数 φ 的范数 $\|\varphi\|_\infty$ 的下确界.* (提示: 观察 H^2 上如下定义的线性泛函: $L(f) = (Hg, h)$, 此处 $f = gh$, 并证明当 H 为有界时, L 连续.)

习题 7.9(Hartman)　若 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一个有界序列, 则相关 Hankel 算子为紧算子当且仅当 $\mathbb{T}$ 上有连续函数 φ 使

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\chi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}^+.^*$$

(提示: 利用习题 1.33 证明某个线性泛函 L 是弱 * 连续的当且仅当 H 是紧的并使用类似于习题 6.36 的结论.)

习题 7.10　代数 $\mathfrak{L}(H^2)$ 中一个算子 H 为一 Hankel 算子当且仅当 $T_{\chi_1}^* H = HT_{\chi_1}$.

习题 7.11　若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数, 则 $\pi(T_\varphi)$ 是 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中一个酉元当且仅当 φ 是 QC 中一个幺模函数. *(提示: 证明 Hankel 算子 H_φ 为紧的当且仅当 $\pi(T_\varphi^*)$ 是 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 中一个等距.)

习题 7.12 若 φ 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$, 则 $\pi(T_\varphi)$ 属于 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathfrak{LC}(H^2)$ 的中心当且仅当 φ 属于 QC. 在中心里是否有其他类型的算子? **③

习题 7.13 证明诸 $\chi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使 $T_\chi T_\varphi - T_{\chi\varphi}$ 为紧算子当且仅当 φ 属于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$. (提示: 将 $T_\chi T_\varphi - T_{\chi\varphi}$ 用 Hankel 算子重写.)

习题 7.14 若 φ 属于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$, 则 φ 在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中可逆当且仅当 T_φ 有闭值域.

习题 7.15 若 φ 属于 $H^\infty + C(\mathbb{T})$ 且 λ 属于 $\sigma(T_\varphi) \setminus \mathscr{R}(\varphi)$, 则要么 λ 为 T_φ 的一个本征值要么 $\overline{\lambda}$ 为 T_φ^* 的一个本征值.

习题 7.16 (Widom-Devinatz) 若 φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个可逆函数, 则 T_φ 可逆当且仅当对于 $\delta \in (0, \pi/2)$ 存在一个外函数 g 使 $|\arg(g\varphi)| < \pi/2 - \delta$.

习题 7.17 证明从 $\mathrm{Aut}[\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))]$ 到 $\mathbb{T}$ 上保持定向的同胚所组成的群 $\mathrm{Hom}_+(\mathbb{T})$ 上有一个自然同态 γ. (提示: 若 φ 属于 $\mathrm{Hom}_+(\mathbb{T})$), 则存在 $K \in \mathfrak{LC}(H^2)$ 使 $T_\varphi + K$ 为一个单侧移位.)

习题 7.18 证明 $\mathrm{Aut}[\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))]$ 中单位元的连通分支 $\mathrm{Aut}_\circ[\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))]$ 含于 γ 的核中, 两者相等吗? **④

习题 7.19 若 φ 为 QC 中幺模函数, 则 H^2 上有一个紧算子 K 使 $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ 上有一个属于核 $\ker\gamma$ 的自同构 $\alpha : T \mapsto (T_\varphi + K)^* T (T_\varphi + K)$. 证明这种形式的自同构没有取遍 $\ker\gamma$. * 这种 α 是否属于 $\mathrm{Aut}_\circ[\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))]$?**⑤

习题 7.20 若 V 为 $\mathscr{H}$ 上一个纯等距, E_n 为到 $V^n\mathscr{H}$ 上的投影算子. 任取 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$, 则 $\mathscr{H}$ 上有个酉算子 $U_t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}(E_n - E_{n+1})$. 由 V 生成的 C*- 代数 $\mathfrak{C}_V$ 上有个自同构 $\beta_t : T \mapsto U_t^* T U_t$, 从圆周群到 $\mathrm{Aut}[\mathfrak{C}_V]$ 的映射 $\Gamma : \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mapsto \beta_t$ 是同态的且诸 $T \in \mathfrak{C}_V$ 使 $F : \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mapsto \beta_t(T)$ 连续. 它依范数连续吗? 进而, 当 $V = T_{\chi_1}$ 时, 酉算子 U_t 等于 H^2 上由旋转 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 所产生的酉算子.

习题 7.21 将 β_t 的不动点集 $\mathfrak{F}_V$ 与 $\mathfrak{C}_V$ 的一个极大阿贝尔子代数等同起来. (提示: 观察 $V = T_{\chi_1}$ 这种情况, 而相应的 $\mathscr{H}$ 取为 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$.)

习题 7.22 证明从 $\mathfrak{C}_V$ 到 $\mathfrak{F}_V$ 上有个压缩正映射如下:

$$\rho : T \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_t(T) \mathrm{d}t,$$

而诸 $T \in \mathfrak{C}_V$ 和诸 $F \in \mathscr{F}_V$ 满足等式 $\rho(TF) = \rho(T)F$.

---

③在文章 [Local Toeplitz Operators, *Proc. London. Math. Soc.* (3) 36, 243-272 (1978)] 中我证明了 QC 为 $\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\ \mathfrak{LC}(H^2)$ 的中心.

④虽然在这个问题上还没有进展, 然而某些相关结果已由 P. S. Muhly 和 J. Xia 所获得 [Automorphisms of the Toeplitz Algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.* 116, No. 4. 1067-1076 (1992)].

⑤参见脚注④.

习题 7.23　设 V_1 和 V_2 分别为 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上纯等距. 若 Φ 是从 $\mathfrak{C}_{V_1}$ 到 $\mathfrak{C}_{V_2}$ 的一个 *- 同态使 $\Phi(V_1)=V_2$, 则 Φ 为一个同构. (提示: 证明 $\rho\circ\Phi=\Phi\circ\rho$ 并且 $\Phi|\mathfrak{F}_{V_1}$ 是个同构.)

习题 7.24　若 A 和 B 分别是 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 上算子且 Φ 是 $\mathfrak{C}_A$ 到 $\mathfrak{C}_B$ 的一个 *- 同态使得 $\Phi(A)=B$, 则从代数 $\mathfrak{C}_{A\oplus B}$ 到 $\mathfrak{C}_A$ 存在 *- 同构 Ψ 使 $\Psi(A\oplus B)=A$.

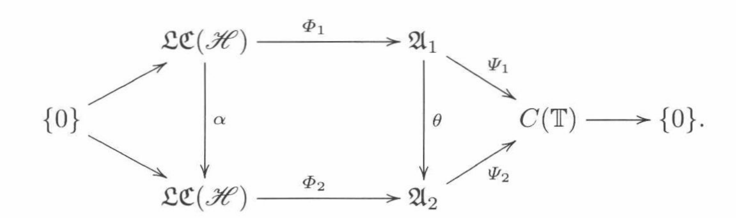
习题 7.25　若 V 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上一个纯等距且 W 为 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$ 上一个酉算子, 则从代数 $\mathfrak{C}_{V\oplus W}$ 到 $\mathfrak{C}_V$ 上存在 *- 同构 $\overline{\Psi}$ 使 $\overline{\Psi}(V\oplus W)=V$.

习题 7.26(Coburn)　如果 V_1 和 V_2 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上非酉等距, 则从 $\mathfrak{C}_{V_1}$ 到 $\mathfrak{C}_{V_2}$ 上存在 *- 同构 Ψ 使 $\Psi(V_1)=V_2$.

定义　称一个 C*- 代数 $\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张 是指从 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 到 $\mathfrak{A}$ 存在 *- 同态 Φ 且从 $\mathfrak{A}$ 到 $C(\mathbb{T})$ 存在 *- 同态 Ψ 使下述序列正合:

$$\{0\}\longrightarrow\mathfrak{LC}(\mathscr{H})\xrightarrow{\Phi}\mathfrak{A}\xrightarrow{\Psi}C(\mathbb{T})\longrightarrow\{0\}.$$

两个扩张 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 为等价的是指从 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 上有同构 θ 且 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 上存在自同构 α 使下图交换:⑥



习题 7.27　若 N 为一个正整数, $\mathfrak{T}_N$ 是由 T_{χ_N} 和 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 生成的 C*- 代数, 则 $\mathfrak{T}_N$ 是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张使 $\psi(T_{\chi_N})=\chi_1$. 进而, $\mathfrak{T}_N$ 与 $\mathfrak{T}_M$ 为同构的 C*- 代数当且仅当 $N=M$. (提示: 观察 $\mathfrak{T}_N$ 中的指标.)

习题 7.28　命 $K^2=L^2(\mathbb{T})\ominus H^2$, Q 为到 K^2 上的投影算子, 定义 $S_\varphi=QM_\varphi|K^2$. 若 N 为一个负整数, 又 $\mathfrak{S}_N$ 是由 S_{χ_N} 和 $\mathfrak{LC}(K^2)$ 生成的 C*- 代数, 则 $\mathfrak{S}_N$ 是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张, 它满足 $\psi(S_{\chi_N})=\chi_1$. 尽管代数 $\mathfrak{T}_N$ 和 $\mathfrak{S}_N$ 同构, 然而扩张 $\mathfrak{T}_M$ 与 $\mathfrak{S}_N$ 不等价.

⑥接下来的工作明白无误地表明, 与算子理论紧密联系的扩张等价性概念要求 α 为恒等映射. 这种研究揭示了算子理论与代数拓扑之间的基本联系, 并开创了当今称之为非交换拓扑和非交换几何的领域, 其基本结果首次出现在与 L. G. Brown 和 P. Q. Fillmore 的合作论文中 [Extension of C*-algebras and K-homology. *Ann. Math.* (2) 105, 265-324 (1977)]. 这一论题的全貌详见于 [C*-algebra Extensions and K-homology. *Ann. Math. Studies* 97, Princeton (1980)]. 它与算子理论和本书主题的各种联系在 X 为平面子集时是最显然的. 至于这一主题已经发展到何种程度, 请参阅 A. Connes 的近期专著 [*Noncommutative Geometry*, Academic Press. San Diego (1994)].

习题 7.29 设 E 为 $\mathbb{T}$ 的一个完全子集, $\mathbb{T}$ 上一个概率测度 μ 有闭支集 $\mathbb{T}$. 设 μ 在 E 上的限制 μ_E 有闭支集 E, 则 $L^2(\mu)$ 上 M_{χ_1} 和 $\mathfrak{LC}(L^2(\mu_E))$ 生成的 C*- 代数 $\mathfrak{A}_E$ 是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张且满足 $\Psi(M_{\chi_1}) = \chi_1$. 进而, 两个这样的扩张等价当且仅当它们对应的 E 相等.

习题 7.30 设 E 为 $\mathbb{T}$ 的一个闭子集, 则 $E = E_0 \bigcup \{e^{it_n} : n \geqslant 1\}$, 此处 E_0 是 $\mathbb{T}$ 的一个完全子集. 设 $\mathbb{T}$ 上一个概率测度 μ 有闭支集 $\mathbb{T}$, μ 在 E_0 上的限制的闭支集是 E_0. 以 $\mathfrak{A}_E$ 记 Hilbert 空间 $L^2(\mu) \oplus \sum\limits_{n\geqslant 1} \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$ 上 $W = M_{\chi_1} \oplus \sum\limits_{n\geqslant 1} \oplus M_{e^{it_n}}$ 和紧算子想想 $\mathfrak{LC}(L^2(\mu_{E_0}) \oplus \sum\limits_{n\geqslant 1} \oplus \ell^2(\mathbb{Z}))$ 生成的 C*- 代数, 则 $\mathfrak{A}_E$ 是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张且满足 $\Psi(W) = \chi_1$. 进而, 两个这样扩张等价当且仅当它们对应的 E 相同.

习题 7.31 诸 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的扩张 $\mathfrak{A}$ 恰等价于形如扩张 $\mathfrak{T}_N$, $\mathfrak{S}_N$ 及 $\mathfrak{A}_E$ 中的一个. *(提示: 假设 $\mathfrak{A}$ 含于 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$, 并且分解 $\mathfrak{LC}$ 在 $\mathscr{H}$ 上的表示. 利用习题 5.18 和习题 5.19.)

习题 7.32 若 T 为 $\mathscr{H}$ 上一个算子使 $\sigma_e(T) = \mathbb{T}$ 且 $T^*T - TT^*$ 是紧的, 则由 T 和紧算子理想 $\mathfrak{LC}(\mathscr{H})$ 生成的 C*- 代数是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张且满足 $\psi(T) = \chi_1$. 它是哪一种扩张?

习题 7.33 依平面 Lebsegue 测定义 $L^2(\mathbb{D})$ 中内积, 以 B^2 记 $L^2(\mathbb{D})$ 中多项式全体的闭包, 以符号 P_B 记 $L^2(\mathbb{D})$ 到 B^2 上的投影算子. 命 $R_\varphi = P_B M_\varphi|_{B^2}$, 则由算子族 $\{R_\varphi : \varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})\}$ 生成的 C*- 代数是 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张, 它是哪一种扩张?*

习题 7.34 若 $\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{LC}$ 通过 $C(\mathbb{T})$ 的一个扩张, 试确定从 Aut($\mathfrak{A}$) 到 Aut(C($\mathbb{T}$)) 的映射的值域. *

习题 7.35 若 λ 为 $\mathbb{T}$ 中一点, φ 为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一函数而 $\widehat{\varphi}$ 是 φ 到 H^∞ 的 Šilov 边界上的调和扩张, 则

$$\widehat{\varphi}(\partial F_\lambda) \subseteq \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) \subseteq h(\widehat{\varphi}(\partial F_\lambda)).$$

习题 7.36 (Widom) 若 φ 为 PC 中函数, 以 $\varphi^\#$ 记 φ 的值域补上在 φ 的诸间断点 e^{it} 连接 $\varphi(e^{it-})$ 到 $\varphi(e^{it+})$ 的直线段后所得到的曲线, 则 T_φ 为 Fredholm 算子当且仅当 $\varphi^\#$ 不包含原点. 此时, T_φ 的指标等于 $\varphi^\#$ 的绕数的负值. *(提示: 利用推论 7.51 证明此时 T_φ 为一个 Fredholm 算子并且它的指标是 $\varphi^\#$ 的绕数的负值. 若 $\varphi^\#$ 通过原点, 则 φ 的所有小扰动产生不同指标的 Fredholm 算子.)

习题 7.37 (Gohberg-Krupnik) 商代数 $\mathfrak{T}(PC)/\mathfrak{LC}(H^2)$ 为一个交换 C*- 代数. 证明它的极大理想空间可等同于带有异常拓扑的柱体. *

习题 7.38　若 X 为 H^2 上一个算子且所有内函数 φ 使 $T_\varphi^* X T_\varphi - X$ 为紧算子, 则 L^∞ 中有函数 ψ 且 H^2 上有紧算子 K 使 X 与 $T_\psi + K$ 相等吗? ** ⑦

习题 7.39　若诸复数 z 对应 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中一个函数 φ_z 而诸 $e^{it} \in \mathbb{T}$ 使 $\varphi_z(e^{it})$ 为 z 的整函数且至多有 N 个零点, 则使 T_{φ_z} 不可逆的 z 全体为 $\mathbb{C}$ 的一个闭子集且最多有 N 个连通分支. *(重复定理 7.45 的整个证明).

⑦虽然这个问题仍未解决, 但 K. Davidson [On Operators Commuting with Toeplitz Operators Modulo the Compact Operators, *J. Functional Analysis* 24, 291-302(1977)] 已证明: 若诸 $\varphi \in H^\infty + C$ 使换位子 $[T_\varphi, X]$ 为紧算子, 则有紧算子 K 和 $H^\infty + C$ 中某函数 ψ 使 $X = T_\psi + K$.

参 考 文 献

[1] M. B. Abrahamse, Toeplitz operators in multiply connected domains,*Bull. Amer. Math. Soc.* **77**, 449-454 (1971).

[2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space.* Ungar, New York, 1961.

[3] M. Atiyah, Algebraic topology and operators in Hilbert space,*Lectures in Analysis,* vol. 103 pp. 101-121. Springer-Verlag, New York, 1969.

[4] F. V. Atkinson, The normal solvability of linear equations in normed spaces, *Mat. Sb.* **28** (70), 3-14 (1951).

[5] S. Banach, *Théorie des opérations linéares.* Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932.

[6] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.* **81**, 239-255 (1949).

[7] N. Bourbaki, *Espaces Vectoriels Topologiques, Éléments de mathématique, livre V.* Hermann, Paris, 1953, 1955.

[8] M. Breuer, Fredholm Theories in von Neumann Algebras I,*Math. Ann.* **178**, 243-354 (1968).

[9] M. Breuer, Fredholm Theories in von Neumann Algebras II,*Math. Ann.* **180**, 313-325 (1969).

[10] A. Browder, *Introduction to Function Algebras.* Benjamin, New York, 1968.

[11] A. Brown and P. R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, *J. Reine Angew. Math.* **213**, 89-102 (1964).

[12] J. Bunce, The joint spectrum of commuting non-normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **29**, 499-504 (1971).

[13] A. Calderon, F. Spitzer, and H. Widom, Inversion of Toeplitz matrices, *Illinois J. Math.* **3**, 490-498 (1959).

[14] L. Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. Math.* **76**, 542-559 (1962).

[15] L. Carleson, The corona theorem, *Proceedings of the 15th Scandinavian Congress Oslo 1968*, vol. 118, pp. 121-132. Springer-Verlag, New York, 1970.

[16] L. A. Coburn, Weyl's Theorem for non-normal operators, *Michigan Math. J.* **13**, 285-286 (1966).

[17] L. A. Coburn, The C*-algebra generated by an isometry I, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 722-726 (1967).

[18] L. A. Coburn, The C*-algebra generated by an isometry II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **137**, 211-217 (1969).

[19] L. A. Coburn and R. G. Douglas, Translation operators on the half-line, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **62**, 1010-1013 (1969).

[20] L. A. Coburn and R. G. Douglas, On C*-algebras of operators on a half-space I, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **40**, 59-67 (1972).

[21] L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer, and I. M. Singer, On C*-algebras of operators on a half-space II: Index Theory, *Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math.* **40**, 69-79 (1972).

[22] L. A. Coburn and A. Lebow, Algebraic theory of Fredholm operators, *J. Math. Mech.* **15**, 577-584 (1966).

[23] H. O. Cordes and J. P. Labrouse, The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech.* **12**, 693-720 (1963).

[24] A. Devinatz, Toeplitz operators on H^2 spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112**, 304–317 (1964).

[25] A. Devinatz, On Wiener-Hopf Operators, in *Functional analysis* (B. Gelbaum, ed.). Thompson, Washington, 1967.

[26] A. Devinatz and M. Shinbrot, General Wiener-Hopf operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **145**, 467–494 (1969).

[27] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*. Gauthier-Villar, Paris, 1957.

[28] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs representations*. Gauthier-Villar, Paris, 1964.

[29] R. G. Douglas, On the spectrum of a class of Toeplitz operators,*J. Math. Mech.* **18**, 433-436 (1968).

[30] R. G. Douglas, Toeplitz and Wiener-Hopf operators in $H^\infty + C$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74**, 895-899 (1968).

[31] R. G. Douglas, On the spectrum of Toeplitz and Wiener-Hopf operators, in *Abstract Spaces and Approximation Theory* (P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy, ed.). Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart, 1969.

[32] R. G. Douglas and Roger Howe, On the C* -algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane, *Trans. Amer. Math. Soc.* **158**, 203-217 (1971).

[33] R. G. Douglas and C. Pearcy, Spectral theory of generalized Toeplitz operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **l15**, 433-444 (1965).

[34] R. G. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, *Pacific J. Math.* **31**, 313-320 (1969).

[35] R. G. Douglas and D. E. Sarason, Fredholm Toeplitz Operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **26**, 117-120 (1970).

[36] R. G. Douglas and D. E. Sarason, A class of Toeplitz operators, *Indiana U. Math. J.* **20**, 891-895 (1971).

[37] R. G. Douglas and J. L. Taylor, Wiener-Hopf operators with measure kernel, *Proceedings of Conference on Operator Theory, Hungary*, 1970.

[38] R. G. Douglas and H. Widom, Toeplitz operators with locally sectorial symbol, *Indiana*

U. Math. J. **20**, 385-388 (1970).

[39] P. Duren, *H^p spaces.* Academic Press, New York, 1970.

[40] T. W. Gamelin, *Uniform algebras.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[41] I. M. Gelfand, Normierte rings, *Mat. Sb. (N.S.)* **9** (51), 3-24 (1941).

[42] I. M. Gelfand, D. A. Raikov and G. E. Šilov, Commutative normed rings, *Usp. Mat. Nauk* **1**, 48-146 (1946); *Amer. Math. Soc. Transl.* **5** (2), 115-220 (1951).

[43] A. Gleason and H. Whitney, The extension of linear functionals defined on H^∞, *Pacific J. Math.* **12**, 163-182 (1962).

[44] C. Goffman and G. Pedrick, *First course in functional analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[45] I. C. Gohberg and I. A. Fel'dman, Projection methods for solving Wiener- Hopf equations, Moldavian Academy of Sciences, Kishinev, 1967 (Russian).

[46] I. C. Gohberg and I. A. Fel'dman, On Wiener-Hopf integral difference equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **183**, 25-28 (1968) (Russian); Soviet Math. Dokl. **9**, 1312-1316 (1968).

[47] I. C. Gohberg and I. A. Fel'dman, Wiener-Hopf integral-difference equations, *Acta. Sci. Math.* 30, 199-224 (1969) (Russian).

[48] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, Fundamental theorems on deficiency numbers, root number, and indices of linear operators, *Usp. Mat. Nauk* **12**, 43-118 (1957) (Russian); *Amer. Math. Soc. Transl.* **13** (2), 185-265 (1960).

[49] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Usp. Mat. Nauk* **13**, 3-72 (1958) (Russian); *Amer. Math. Soc. Transl.* **14** (2), 217-287 (1960).

[50] I. C. Gohberg and N. Ya. Krupnik, On an algebra generated by Toeplitz matrices, *Functional Anal Prilozen.* **3**, 46-56 (1969) (Russian); *Functional Anal. Appl.* **3**, 119-127 (1969).

[51] Seymour Goldberg, *Unbounded linear operators.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[52] L. S. Goldenstein, Multi-dimensional integral equations of Wiener-Hopf type, *Bull. Akad. Stiince RSS Mold.* no. 6, 27-38 (1964) (Russian).

[53] L. S. Goldenstein and I. C. Gohberg, On a multi-dimensional integral equation on a half-space whose kernel is a function of the difference of the arguments and on a discrete analogue of this equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **131**, 9-12 (1960) (Russian); *Soviet Math. Dokl.* **1**, 173-176 (1960).

[54] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz forms and their applications.* University of California Press, 1958.

[55] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity.* Chelsea, New York, 1951.

[56] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, *J. Reine Angew. Math.* **208**, 102-112 (1961).

[57] P. R. Halmos, A glimpse into Hilbert space.*Lectures on modern mathematics*. Vol. 1, 1-22. Wiley, New York, 1963.

[58] P. R. HalmoS, *A Hilbert space problem book*. van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1967.

[59] P. Hartman and A. Wintner, On the spectra of Toeplitz's matrices, *Amer. J. Math.* **72**, 359-366 (1950).

[60] P. Hartman and A. Wintner, The spectra of Toeplitz's matrices, *Amer. J. Math.* **76**, 867-882 (1954).

[61] H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*. Academic Press, New York, 1964.

[62] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, *Acta Math.* **99**, 165-202 (1958).

[63] H. Helson and D. E. Sarason, Past and future, *Math. Scand.* **21**, 5-16 (1967).

[64] H. Helson and G. Szegö, A problem in prediction theory, *Am. Mat. Pura Appl.* **51**, 107-138 (1960).

[65] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag, New York, 1965.

[66] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[67] Sze-Tsen Hu,*Homotopy theory*. Academic Press, New York, 1959.

[68] R. S. Ismagilov, The spectrum of Toeplitz matrices, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **149**, 769-772 (1963); *Soviet Math. Dokl.* **4**, 462-465 (1963).

[69] M. Kac, Theory and applications of Toeplitz forms, in *Summer institute on spectral theory and statistical mechanics*. Brookhaven National Laboratory, 1965.

[70] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, New York, 1966.

[71] J. L. Kelley, *General topology*. van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey 1955.

[72] M. G. Kreĭn, Integral equations on half line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Usp. Mat. Nauk* **13**, 3-120 (1958) (Russian); *Amer. Math. Soc. Transl.* **22** (2), 163-288 (1962).

[73] N. H. Kuiper, The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology* **3**, 19-30 (1965).

[74] Serge Lang,*Analysis II*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

[75] P. Lax, Translation invariant subspaces, *Acta. Math.* **101**, 163-178 (1959).

[76] P. Lax, Translation invariant spaces, *Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem*, 1960, pp. 251-262. Macmillan, New York (1961).

[77] M. Lee and D. E. Sarason, The spectra of some Toeplitz operators,*J. Math. Anal. Appl.* **33**, 529-543 (1971).

[78] V. A. Malyšev, On the solution of discrete Wiener-Hopf equations in a quarter-plane, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **187**, 1243-1246 (1969) (Russian);*Soviet Math. Dokl.* **10**,

1032-1036 (1969).

[79] K. Maurin, *Methods of Hilbert spaces.* Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1967.

[80] M. A. Naimark, *Normed rings.* Noordhoff, Groningen, 1959.

[81] J. von Neumann, Eigenwerttheorie Hermitescher Funktional Operatoren, *Math. Ann.* **102**, 49-131 (1929).

[82] J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.* **102**, 370-427 (1929).

[83] S. J. Osher, Systems of difference equations with general homogeneous boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **137**, 177-201 (1969).

[84] S. J. Osher, On certain Toeplitz operators in two variables, *Pacific J. Math.* **37**, 123-129 (1970).

[85] R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* Annals of Math. Studies, Princeton, 1965.

[86] J. D. Pincus, The spectral theory of self-adjoint Wiener-Hopf operators, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, 882-887 (1966).

[87] H. R. Pousson, Systems of Toeplitz operators on H^2 II, *Trans. Amer. Math. Soc.133*, 527-536 (1968).

[88] M. Rabindranathan, On the inversion of Toeplitz operators, *J. Math. Mech.* **19**, 195-206 (1969).

[89] C. E. Rickart, *Banach algebras.* van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1960.

[90] F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Z.* **18**, 87-95 (1923).

[91] F. Riesz and M. Riesz, Über die Randwert einer analytischen Funktion *4e Congr. des Math. Scand.* 27-44 (1916).

[92] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis.* Ungar, New York, 1955.

[93] M. Rosenblum, On a theorem of Fuglede and Putnam, J. London Math. Soc. 33, 376-377 (1958).

[94] M. Rosenblum, A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators, *Amer. J. Math.* **87**, 709-718 (1965).

[95] W. Rudin, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[96] David Ruelle, Integral representations of states on a C^*-algebra, *J. Functional Analysis* **6**, 116-151 (1970).

[97] D. E. Sarason, Generalized interpolation on H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.* **127**, 179-203 (1967).

[98] D. E. Sarason, On products of Toeplitz operators,*Acta Sci. Math.* **35**, 7-12 (1973).

[99] D. E. Sarason, Invariant subspaces, in *Topics in operator theory*, Math. Assoc. Amer., pp. 1-47 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1977).

[100] I.J. Schark, The maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions, *J. Math. Mech.* **10**, 735-746 (1961).

[101] I. B. Simonenko, Operators of convolution type in cones, *Mat. Sb.* **74** (116) 298-313 (1967) (Russian); *Math. USSR Sb.* **3**, 279-293 (1967).

[102] I. B. Simonenko, Some general questions in the theory of the Riemann boundary problem, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **32** 1138-1146 (1968) (Russian); *Math USSR Izv.* **2**, 1091-1099 (1968).

[103] J. G. Stampfli, On hyponormal and Toeplitz operators, *Math. Ann.* **183**, 328-336 (1969).

[104] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis.* Amer. Math Soc., New York, 1932.

[105] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 375-481 (1937).

[106] G. Strang, Toeplitz operators in the quarter-plane, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1303-1307 (1970).

[107] B. Sz.-Nagy and C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Akademiai Kiado, Budapest, 1970.

[108] J. L. Taylor, The cohomology of the spectrum of a measure algebra, *Acta Math.* 126, 195-225 (1971).

[109] O. Toeplitz, Zur theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen,*Math. Ann.* **70**, 351-376 (1911).

[110] H. Widom, Inversion of Toeplitz matrices II, *Illinois J. Math.* **4**, 88-99 (1960).

[111] H. Widom, Inversion of Toeplitz matrices III, *Notices Amer. Math. Soc.* **7**, 63 (1960).

[112] H. Widom, Toeplitz matrices, in *Studies in real and complex analysis*, Math. Assoc. Amer., 179-209, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[113] H. Widom, On the spectrum of Toeplitz operators, *Pacific J. Math.* **14**, 365-375 (1964).

[114] H. Widom, Toeplitz operators on H_p, *Pacific J. Math.* **19**, 573-582 (1966).

[115] N. Wiener and E. Hopf, Über eine Klasse singularen Integral-gleichungen, *S.-B. Preuss Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl.* **30/32**, 696-706 (1931).

[116] A. Wintner, Zur theorie der beschränkten Bilinear formen, *Math. Z.* **30**, 228-282 (1929).

[117] K. Yoshida, *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

索　　引

符号

(,), 56

A, 45

$BV[0,1]$, 15

$C(X)$, 1

F_λ, 167

H^1, 25

H^p, 126

H^∞, 25

$H^\infty + C(\mathbb{T})$, 137

H_0^p, 136

I_E, 17

L^1, 22

L^p, 23

L^∞, 23

$M(X)$, 19

$M_{\mathfrak{B}}$, 35

M_∞, 130

M_φ, 78

P, 150

PC, 148

$P_{\mathscr{M}}$, 76

QC, 149

T_K, 108

T_φ, 150

U, 80

U_+, 85

$U_+^{(n)}$, 116

$W(\ )$, 100

χ_n, 25

$\ell^1(\mathbb{Z}^+)$, 6

$\ell^2(\mathbb{Z})$, 80

$\ell^2(\mathbb{Z}^+)$, 59

$\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$, 6

exp, 33

$\mathfrak{C}_T$, 82

$\mathfrak{F}(\ )$, 109

$\mathfrak{F}_n$, 111

$\mathfrak{L}(\ )$, 20

ker, 30, 73

$\mathbb{C}^n$, 59

$\mathbb{D}$, 45

$\mathbb{R}$, 3

$\mathbb{T}$, 25

$\mathbb{Z}$, 6

$\mathbb{Z}^+$, 6

$\mathbb{C}$, 1

$\mathfrak{LC}(\ )$, 105

$\mathfrak{LF}(\ )$, 105

$\mathfrak{T}(\ )$, 152

$\mathfrak{W}_T$, 89

$\mathscr{G}$, 33

$\mathscr{P}$, 45

$\mathscr{P}_+$, 45

$\mathscr{R}(\ )$, 50

$\oplus$, 27, 70

$\otimes$, 29, 54, 71, 103

∂F_λ, 167

$\rho(\ )$, 37

$\rho_e(\ )$, 161

$\sigma(\ )$, 37

$\sum$, 3

Aut( ), 53

ran, 40, 73

$\Gamma_{\mathfrak{B}}$, 36
$\Lambda_{\mathfrak{B}}$, 33
*, 5, 72
$^\perp$, 28, 63
$'$, 94
$c_0(\mathbb{Z}^+)$, 6
$h(E)$, 154
i_t, 156
j, 111
$r(\ \ )$, 37
$w(\ \ )$, 100
$(\ \ )_1$, 8

B

半单代数, 52
本质谱, 109, 160
本质有界函数, 23
本质预解集, 161
本质值域, 50
闭包, 线性变换的 ~, 103
闭凸包, 154
闭图像定理, 27
不变子空间, 87
不可约子集, 120
部分等距, 84

C

测度的绝对连续性, 91
乘法算子, 78
抽象指标, 33, 114, 117
抽象指标群, 33, 34, 54
纯等距, 146
纯等距的重数, 146
次调和函数, 147
次线性泛函, 9
次正规算子, 155

D

单侧移位, 85, 102, 116
单位球, Banach 空间的 ~, 8
等距, 84, 102, 123
典则映射, 27
定向集, 2
度量, 1
度量空间, 1
端点, 26, 70
对称线性变换见线性变换, 对称 ~, 103
对和, Banach 代数的 ~, 72, 81
对偶空间, 5
多项式, 解析三角 ~, 45
多项式, 三角 ~, 45

F

范数, 1
范数, 内积空间 ~, 57
分段连续函数, 148
分离向量, 92
符号, Toeplitz 算子的 ~, 150
赋范线性空间, 4, 26

G

根理想, Banach 代数的 ~, 52
共轭, Hilbert 空间上算子的 ~, 72
共轭, 稠定闭线性变换的 ~, 103
共轭, 有界线性变换的 ~, 28
共轭等距, 102
共轭空间, 5
广义本征空间, 112
规范正交的, 58
规范正交基, 70
归纳张量积, Banach 空间的 ~, 29

H

函数代数, 44
函数代数的边界, 53
函数演算, 83, 88
函数演算, 扩充 ~, 92, 98
核, 积分算子的 ~, 108
核, 算子的 ~, 73
换位, 代数的, 94
换位子, 152
换位子理想, 123, 152

J

积分算子, 108, 123
极大交换子代数, 79
极大理想空间, 39
极分解, 86, 87
极化恒等式, 56, 75
极形式, 84
简单不变子空间, 128
渐近可乘同态, 142
截面映射, 150
紧算子, 105, 122
经典指标, 111, 117
局部化, C*- 代数的 ~, 165
卷积, 47
绝对收敛的 Fourier 级数, 49, 53

K

开映射定理, 21
可乘线性泛函, 30, 35
可除代数, 38
可和性, Banach 空间中 ~, 3
扩张, C*- 代数的 ~, 173

L

零化子, 子空间的 ~, 28

M

幂等算子, 101

N

内函数, 129
内积, 56
内积空间, 56
内外因子分解, 133
拟幂零算子, 114, 123
逆算子定理, 20

P

平方根, 正算子的 ~, 84
平行四边形法则, 58
谱, 37
谱, 算子的 ~, 75
谱半径, 37
谱包含定理, 151, 158
谱测度, 99
谱测度, 数值 ~, 98
谱定理, 82
谱投影, 98
谱映射定理, 40
谱子空间, 98

Q

强算子拓扑, 88

R

日冕定理, 131, 146
弱算子拓扑, 88
弱拓扑, 28
弱 * 拓扑, 8, 28

S

商代数, 38
商空间, 19
商 C*- 代数, 118
上同伦群, 34
射影张量积, Banach 空间的 ~, 29
始空间, 部分等距的 ~, 84
数值半径, 100
数值域, 100
双侧移位, 80
算子, 72
算子元素矩阵, 101

T

态, 124
态, 纯 ~, 125
特征函数, 17
投影算子, 76
调和扩张, 140, 142

W

外函数, 147
外函数, H^1 中 ~, 145
外函数, H^2 中 ~, 133
完备度量空间, 2
网, 2

X

下有界算子, 74
纤维, M_∞ 的 ~, 145
线性变换, 对称 ~, 103
线性变换, 可闭 ~, 103
线性变换, 有界 ~, 20
线性变换, 自伴 ~, 103
线性泛函, 4, 64
相似性, 算子的 ~, 101
循环向量, 92, 133

Y

酉等价, 算子的 ~, 101
酉算子, 75, 102
酉元, C*- 代数中 ~, 81
有界变差函数, 12
有界全纯函数的代数, 25, 126
有限秩算子, 52, 105
诱导拓扑, 8
预解集, 37
圆盘代数, 45
圆周群, 45
约化子空间, 87

Z

张量积, Hilbert 空间的 ~, 71
张量积, Hilbert 空间上算子的 ~, 103
正规算子, 75
正规元, C*- 代数中 ~, 81
正交补, 63
正交的, 58
正算子, 75
直和, Banach 空间的 ~, 27
直和, Hilbert 空间的 ~, 70
值域, 算子的 ~, 73
指示函数 (见特征函数), 17
指数映射, 33
中心, 代数的 ~, 165
自伴算子, 75
自伴元, C*- 代数中 ~, 81
自反 Banach 空间, 27
自共轭子集, 41
自同构, Banach 代数的 ~, 53
自同构, C*- 代数的内 ~, 122
自同构, C*- 代数的弱 ~, 122

其他

Čech 上同调群, 35
Šilov 边界, 54
Šilov 定理, 47
Alaoglu 定理, 8
Atkinson 定理, 110
Banach 代数, 31
Banach 定理, 11, 29
Banach 空间, 2
Brown-Halmos 定理, 154
C*- 代数, 81
Calkin 代数, 109
Cauchy 网, 3
Cauchy-Schwarz 不等式, 57
Coburn 定理, 155, 156
Dirichlet 问题, 144
Fatou 定理, 147
Fourier 级数, 49
Fourier 系数, 49, 67
Fredholm 二择性, 112
Fredholm 积分算子, 108
Fugledge 定理, 99, 104
Gelfand 变换, 36
Gelfand 定理, 39
Gelfand-Mazur 定理, 38
Gelfand-Naimark 定理, 82
Gleason-Whitney 定理, 138
Gohberg 定理, 123
Gohberg-Krupnik 定理, 174
Gram-Schmidt 正交化过程, 70
Grothendieck 定理, 29
Hahn-Banach 定理, 9, 10, 70
Hankel 矩阵, 171

Hankel 算子, 171
Hardy 空间, 25, 62, 126
Hartman 定理, 171
Hartman-Wintner 定理, 151, 154
Hausdorff-Toeplitz 定理, 100
Hellinger-Toeplitz 定理, 101
Helson-Szegö定理, 157
Hermit 算子, 75
Hilbert 空间, 58
Hilbert 空间的维数, 68, 71
Hilbert 空间之间的等距同构, 68
Jensen 不等式, 147
Kolmogorov-Kreĭn 定理, 147
Kreĭn 定理, 124
Kreĭn-Mil'man 定理, 27
Kreĭn-Smul'yan 定理, 29
Lebesgue 空间, 22
Nehari 定理, 171
Newman 定理, 146
Radon-Nikodym 定理, 23, 71
Riemann-Stieltjes 积分, 13
Riesz (F. & M.) 定理, 129, 130
Riesz 表示定理, 64
Riesz 定理, 16
Riesz 函数演算, 53
Riesz-Markov 表示定理, 19
Stone-Čech 紧化, 51, 52
Stone-Weierstrass 定理, 41
Stone-Weierstrass 定理, 广义 ~, 44
Sz.-Nagy 定理, 146
Szegö定理, 148
Toeplitz 矩阵, 150
Toeplitz 算子, 150
Volterra 积分算子, 113
von Neumann 双换位定理, 103
von Neumann-Wold 分解, 146
W*- 代数, 89
Weierstrass 定理, 42
Weyl-von Neumann 定理, 124
Widom 定理, 165, 174
Widom-Devinatz 定理, 172
Wiener 定理, 49
Wiener-Hopf 算子, 168
Wintner 定理, 155
*- 同态, 79, 96

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007. 12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008. 1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008. 5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008. 6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008. 6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008. 7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009. 1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009. 12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010. 6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011. 3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17　合作博弈理论模型　2011.7〔罗〕Rodica Branzei〔德〕Dinko Dimitrov〔荷〕Stef Tijs　著　刘小冬 刘九强　译

18　变分分析与广义微分 I：基础理论　2011. 9〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著　赵亚莉　王炳武　钱伟懿　译

19　随机微分方程导论应用(第 6 版)　2012. 4〔挪〕Bernt Øksendal　著　刘金山　吴付科　译

20　金融衍生产品的数学模型　2012.4　郭宇权(Yue-Kuen Kwok)　著　张寄洲　边保军　徐承龙 等　译

21　欧拉图与相关专题　2012.4〔英〕Herbert Fleischner　著　孙志人　李　皓　刘桂真　刘振宏　束金龙　译　张　昭　黄晓晖　审校

22　重分形：理论及应用　2012.5〔美〕戴维 • 哈特　著　华南理工分形课题组　译

23　组合最优化：理论与算法　2014. 1〔德〕 Bernhard Korte　Jens Vygen 著　姚恩瑜　林治勋　越民义　张国川　译

24　变分分析与广义微分 II：应用　2014. 1〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著　李　春　王炳武　赵亚莉　王　东　译

25　算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版)　2014.3〔美〕 Ronald G. Douglas 著　颜　军　徐胜芝　舒永录　蒋卫生　郑德超　孙顺华　译